60983

ELEMENTI
DI MECCANICA
E
D' IDRAULICA
DI
GIUSEPPE VENTUROLI

PROFESSORE DI MATEMATICA APPLICATA

Nella R. Università di Bologna.

SECONDA EDIZIONE

VOLUME PRIMO.

BIBLIOTECA PROVINCIALE NAPOLI

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO E.M. III" NAPOLI

BOLOGNA 1809.

Tipografia de' Fratelli Masi, e Comp.

Stampato sotto la protezione della Legge
19. Fiorile Anno IX.

Questa seconda edizione degli Elementi di Meccanica e d' Idraulica ho posto ogni studio nell' emendarla diligentemente, e nell' accrescerla di copiosi Supplementi; profittando secondo mie forze del consiglio di dotti amici, e sopra tutti del Sig. Cav. Ruffini, a cui singolarmente ho l' obbligazione di amorevoli ed utilissimi avvisi.

Tra i Supplementi terrà il primo luogo un Introduzione alla Meccanica Sublime stesa coll' intendimento di porger guida agli studiosi che dopo il Corso Elementare volessero poggiare alle più alte cime della Scienza, e studiarla nelle Opere Classiche che ne hanno toccate le ultime mete; quali sono la Meccanica d' Eulero, la Meccanica analitica di La Grange, e la Meccanica Celeste di La Place.

*

Questo primo Volume che ora esce in luce contiene gli Elementi di Meccanica: seguirà senza interruzione il secondo che avrà gli Elementi d' Idraulica; ed il terzo che conterrà i Supplementi.

Prego frattanto quei Dotti che fecero sì liberale accoglienza a questi Elementi, a non esser meno cortesi a questa seconda Edizione di quel che fossero alla prima: la quale ben può chiamarsi fortunata pel favore con cui fu accolta, e per l' onore che le fecero la Direzione degli Studj ed il Real Ministero della Guerra coll' adottarla per le Università del Regno, e per la Scuola del Genio.

PREFAZIONE

La Meccanica per ciò che riguarda il modo di trattarla può comodamente dividersi così che altra sia Meccanica Speculativa o Razionale, altra Meccanica Istrumentale o Pratica. La qual divisione essendo piaciuta all' incomparabile Neuton, non temerò che possa essere da altri disapprovata.

Come la Geometria suppone il corpo esteso, così la Meccanica Razionale il suppone impenetrabile, inerte, animato da forze motrici. Le leggi di queste forze finge essa e varia a suo talento, niente sollecita d' indagare se siano o nò tali forze nella natura. Nel che s' assomiglia alla Geometria, la quale fingendosi che un punto o una linea s' aggiri secondo certa legge, e considerando

le proprietà della figura che per questo moto è descritta, punto non cerca se tal movimento e tal figura abbia esistito o sia per esister giammai. Da che si vede che entrambe queste scienze non cercano altrove l' oggetto loro, ma sel creano e sel compongon da se per operazioni mentali. La Meccanica considerata sotto quest' aspetto appartiene alla Matematica pura; e non ha men salde basi, nè meno chiara evidenza di quella che abbiasi la Geometria stessa.

Ma dalla contemplazione della quantità astratta i bisogni della società ci richiamano ad ogni tratto alla quantità concreta e sensibile, e dal Mondo intellettuale ci ritraggono al Mondo fisico. Egli è allora che dato bando ai concetti puramente ideali ed alle capricciose ipotesi, ci conviene rintracciare nella natura stessa i veri dati della scienza. Pertanto ad assicurare il passaggio dalla Meccanica speculativa alla pratica, dovremo primieramente accertarci se i corpi naturali siano di verità impenetrabili ed inerti: poi rivolgendoci

ai diversi agenti eccitatori del moto, cercar di conoscere la misura e la legge delle loro azioni. Al che niun altra guida può scorgerci fuor dell' osservazione e della sperienza, uniche sorgenti di tutte le nostre nozioni sulle primarie proprietà de' corpi. Fra gl' infiniti sistemi e leggi di forze che la Meccanica Razionale finge e compone ad arbitrio, basterà allora trasceglier quelle che abbiam trovato aver luogo in natura; e per tal via gli astratti dogmi della Scienza con sicuro successo s' applicheranno alla pratica.

Seguendo la traccia che le premesse riflessioni ci additano, ho compreso ne' primi due Libri gli Elementi della Meccanica Razionale. La dottrina della composizione delle forze, e quella del centro di gravità esposte ne' primi dodici Capi ponno aversi come un Introduzione a tutto il Trattato. Segue l' esposizione delle leggi generali dell' equilibrio nel primo Libro, e di quelle del moto nel secondo. Entrambe procedono collo stesso ordine, parlandosi prima

d' un punto o elemento materiale isolato, appresso d' un sistema di punti supposto di forma invariabile, in ultimo de' sistemi di forma variabile.

I tre Libri seguenti si riferiscono alla Meccanica Istrumentale o Pratica. La qual trattazione per le cose dette ha due parti; dovendosi in prima riconoscere dall' osservazione e dall' esperienza le qualità meccaniche de' corpi, e le leggi delle forze motrici; poscia applicare le leggi universali della meccanica alle ricerche che più da vicino riguardano la pratica.

Al primo oggetto ho inteso di soddisfare nel terzo Libro, nel quale dalle migliori sperienze ho procurato raccogliere le più accertate e le più estese nozioni sulla misura e sul modo di agire delle forze naturali. Queste forze sono di due maniere: poichè altre sono atte a produr moto, altre non vagliono che a spegnere o diminuire il moto prodotto dalle prime. Per il che seguendo quest' ordine ho trattato prima delle forze attive, poi delle forze passive, che con altro nome si dicono resistenze.

Restano le applicazioni pratiche. Ma nell' infinita loro varietà era d' uopo fare una scelta. Io mi sono fermato su quegli oggetti che il Regolamento scientifico della nostra Università principalmente raccomanda. E nel quarto Libro ho considerato l' equilibrio delle fabbriche, sciogliendo i principali problemi che a ciò si riferiscono. Nel Quinto ho esposta la Teoria delle Macchine nell' equilibrio, nello stato prossimo al moto, e nel moto attuale; sembrandomi manchevole e difettosa ogni trattazione degli Strumenti Meccanici, nella quale non si considerino partitamente questi tre stati.

Sin quì della materia del libro. Per ciò che riguarda il modo d' esporla ho conosciuto per prova quanto sia malagevole tener giusto mezzo tra la soverchia prolissità, e la soverchia strettezza. Ne sò se in questa parte possa sperarsi di soddisfare al genio di tutti. Poichè son di quegli che vorrebbon esser condotti per via pianissima e si sdegnano del più lieve intoppo, altri per l' opposto

prendono a noja le dichiarazioni troppo minute, e voglion pure che qualche cosa si lasci all'ingegno ed alla diligenza de' giovani. Io ho voluto essere anzi conciso che nò, ma non vorrei esserlo stato soverchiamente. Ad ogni modo potendo questi Elementi servir di Testo a pubbliche o private Lezioni, ad ogni difetto di questo genere supplirà facilmente la viva voce; ond' io mi terrò assai pago se la scelta e la distribuzione delle materie incontri favorevole accoglimento.

ELEMENTI DI MECCANICA

LIBRO PRIMO

DELL' EQUILIBRIO

CAP. I.

Nozioni preliminari.

1. MECCANICA è la scienza dell'equilibrio, e del moto. Quella parte che riguarda l'equilibrio, dicesi particolarmente *Statica*; quella che riguarda il moto, suol dirsi quantunque meno propriamente, *Dinamica*.

2. *Moto* è passaggio da luogo a luogo; *quiete* permanenza nello stesso luogo.

3. Non v' ha moto senza determinata velocità e direzione. *Velocità* è il rapporto dello spazio percorso dal mobile al tempo in cui è percorso: nel che vuolsi avvertire che non si paragonano già fra loro le quantità concrete, ma i numeri che le rappresentano, cioè i rapporti di ciascheduna alla sua unità. *Direzione* è la retta percorsa dal mobile a ciascun istante.

4. Se la velocità è costante, dicesi il moto *uniforme*, ovvero *equabile*; se cangia, dicesi *vario*. E se la direzione è costante, il moto è *rettilineo*; se cangia continuamente, *curvilineo*.

5. Così il moto come l'equilibrio sono affezioni della materia. Intendiamo poi per *materia* una sostanza dotata d'impenetrabilità, e d'inerzia.

6. *Impenetrabilità* è quella proprietà per cui diverse particelle elementari di materia non possono simultaneamente occupare lo stesso luogo.

7. *Inerzia* è quella proprietà per cui ogni particella elementare di materia abbandonata a se stessa conserva lo stato impresso sia di quiete, sia di moto uniforme e rettilineo.

8. *Corpo* è l'aggregato di più elementi materiali, non divisi che da picciolissimi intervalli. La somma degli elementi materiali che costituiscono il corpo, è la sua *massa*; gl'intervalli che li dividono, si chiaman *pori*; lo spazio occupato dalla massa e da' pori, è il *volume*; il rapporto tra la massa e il volume, è la *densità* del corpo.

9. *Forza* o *potenza* è la cagione che imprime o tende ad imprimer moto. Ogni forza produce moto *attuale*, se non venga elisa da forze contrarie. Se poi resta elisa, il moto cui essa tende a produrre, dicesi *virtuale*.

10. Le forze non ponno conoscersi nè misurarsi altramente che da' loro effetti. Or l'effetto d'una forza applicata ad un elemento materiale è d' imprimergli una certa velocità secondo una certa direzione. Questa velocità, sia poi attuale o virtuale, valutata secondo questa direzione, assumesi a misura della forza.

11. *Equilibrio* è lo stato d'un mobile sollecitato da più forze che scambievolmente s' elidono.

CAP. II.

Della composizione delle forze.

12. *Proposizione I.* Concorrendo nello stesso punto o elemento materiale più forze con direzioni comunque diverse, si comporrà di queste forze una forza unica ad esse equivalente.

Infatti il moto, che il punto prenderà o tenderà a prendere per l'azion simultanea di tutte le forze dovrà pure avere una velocità ed una direzione determinata, come se procedesse da una forza unica.

13. Le forze agenti simultaneamente sul mobile si dicono *componenti* rispetto di quell' unica che ad esse equivale, la qual dicesi *risultante*.

14. *Proposizione II.* Se due forze concorrono in un punto ad angolo qualunque, compiuto il parallelogrammo co' lati che le rappresentano, la diagonale rappresenterà la risultante.

Sia il punto A (Fig. 1.) animato dalle due forze AB, AC; per la prima delle quali in un certo tempo t esso verrebbe in B descrivendo il lato AB, e per la seconda verrebbe in C descrivendo il lato AC. Dico che per l'azion simultanea delle due forze, esso nel tempo t verrà in D descrivendo la diagonale AD.

Infatti (a) la forza AB essendo parallela al lato CD non può nè accostare il mobile A al lato CD, nè scostarnelo. Dunque il punto A per le due forze AB, AC giungerà al lato CD nello stesso tempo nel quale vi giungerebbe per la sola forza AC; vale a dire nel tempo t. Similmente si prova che il punto A giungerà al lato BD nel tempo t. Adunque dopo il tempo t dovrà quel punto trovarsi tanto sul lato CD quanto sul lato BD. Si troverà dunque in D, estremo della diagonale.

15. *Corollario I.* La risultante di due forze *cospiranti* è uguale alla loro somma; quella di due forze *opposte* è uguale alla loro differenza.

(a) *Newton. Princip. Axiom. Coroll.* 1.

16. *Coroll. II.* Nel triangolo *A B D* i lati *A B*, *B D*, *A D* rappresentano le tre forze *A B*, *A C*, *A D*; ed i seni degli angoli *B A D*, *B D A*, *A B D* son gli stessi che i seni degli angoli *B A D*, *C A D*, *B A C*, che son gli angoli che fanno tra loro le direzioni delle forze. Onde si vede che il triangolo *ABD* rappresenta ne' suoi elementi le tre forze suddette, e i loro angoli.

17. *Coroll. III.* Ciascheduna delle tre forze *A B*, *A C*, *A D* è proporzionale al seno dell' angolo formato dalle altre due.

18. *Coroll. IV.* E due qualunque di esse stanno fra loro in ragione inversa delle perpendicolari condotte sulle loro direzioni da un punto preso ad arbitrio sulla direzione della terza.

19. *Proposizione III.* Se tre forze concorrono in un punto con direzioni qualunque, compiuto il parallelepipedo coi lati che le rappresentano, la diagonale rappresenterà la risultante.

Siano le tre forze (Fig. 2.) *A M*, *A N*, *A O*. Compiuto il parallelepipedo si segni la diagonale *A X*, e si conducano le rette *A Y*, *O X*. Essendo i lati *A O*, *Y X* eguali e paralleli, lo saranno pure le rette *A Y*, *O X*; e sarà *A O X Y* un parallelogrammo che avrà per diagonale *A X*. Ora la *A Y* sarà la risultante delle due forze *A M*, *A N* (14) e

la AX sarà la risultante delle due AY, AO, che vale a dire delle tre AM, AN, AO.

20. *Coroll.* Generalmente se più forze concorrono in un punto, è facile l' assegnare il valore e la posizione della risultante.

Si formi un parallelogrammo coi lati che esprimono le prime due forze, e la diagonale esprimerà la risultante delle due prime. Si formi un nuovo parallelogrammo con questa diagonale e colla retta che esprime la terza forza, e la nuova diagonale sarà la risultante delle tre prime. Proseguendo così, l' ultima diagonale sarà la risultante di tutte.

Oppure si formi un poligono i lati del quale cominciando dal punto cui sono applicate le forze siano successivamente eguali e paralleli a ciascheduna delle forze, e diretti nello stesso senso. Si chiuda il poligono congiungendo i termini del primo e dell' ultimo lato. La retta che chiude il poligono, è la risultante.

Che se le forze e le loro direzioni sono date in numeri, e si voglia per simil modo determinata la risultante, il problema si scioglie per la trigonometria, come può dedursi da quanto si è detto all'art. 16. risolvendo tanti triangoli meno uno quante sono le forze.

21. *Proposizione IV.* Una forza può risolversi in due ad essa equivalenti.

Rappresentando infatti quella forza con una linea retta, e formando attorno di essa come diagonale un parallelogrammo, i lati del parallelogrammo esprimeranno due forze ad essa equivalenti. Onde si vede (16) che il problema è indeterminato, salvo se fosser dati di più i valori delle due forze componenti, o le direzioni loro, o il valore dell' una e la direzione dell' altra.

22. *Coroll.* Generalmente se formasi un poligono qualunque, prendendo per un de' lati la retta che rappresenta la forza data, gli altri lati esprimeranno (20) le forze nelle quali essa può risolversi.

CAP. III.

Formole che esprimono la risultante, date le componenti, e viceversa.

23. La composizione e la risoluzione delle forze sono d'uso continuo nella Meccanica. Però fia bene rendersi famigliari le formole che esprimono la relazione fra la risultante e le componenti ne' casi di più frequente occorrenza. Queste formole si deducon tutte dalla trigonometria analitica, giacchè la composizione delle forze, e la risoluzione delle medesime sotto date condi-

zioni si riducono (16) alla soluzione d' un triangolo.

24. *Proposizione I.* Concorrano in un punto due forze P, Q ad angolo θ. Si cerca la risultante S, e gli angoli α, β che essa fa colle componenti P, Q.

Sarà $S = \sqrt{(P^2 + 2PQ\cos.\theta + Q^2)}$

$$\text{sin. } \alpha = \frac{Q \text{ sin. } \theta}{S}, \quad \text{sin. } \beta = \frac{P \text{ sin. } \theta}{S}$$

25. *Coroll. I.* Se le due forze P, Q sono eguali, avremo

$$\alpha = \beta = \tfrac{1}{2}\theta; \quad S = 2P\cos.\alpha$$

26 *Coroll. II.* Se le due forze P, Q concorrono ad angolo retto, sarà

$$S = \sqrt{(P^2 + Q^2)};$$

$$\text{sin. } \alpha = \cos.\beta = \frac{Q}{S}; \quad \text{sin. } \beta = \cos.\alpha = \frac{P}{S}$$

27. *Coroll. III.* E se tre forze P, Q, R concorrono in un punto ad angoli retti, la risultante S, e gli angoli α, β, γ che essa fa colle tre forze saranno determinati come segue

$$S = \sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)}$$

$$\cos.\alpha = \frac{P}{S}; \quad \cos.\beta = \frac{Q}{S}; \quad \cos.\gamma = \frac{R}{S}.$$

28. *Proposizione II.* Data una forza S che faccia gli angoli α, β con due assi tra loro perpendicolari, risolverla in due P, Q parallele rispettivamente a questi assi.

Sarà $P = S$ cos. α; $Q = S$ cos. β; ossia, poichè cos. $\beta =$ sin. α; sarà $P = S$ cos. α; $Q = S$ sin. α.

29. *Coroll.* Similmente se la forza S farà gli angoli α, β, γ con tre assi ortogonali, e si voglia risolverla in tre P, Q, R parallele ai tre assi, riuscirà

$P = S$ cos. α; $Q = S$ cos. β; $R = S$ cos. γ.

30. *Proposizione III.* Concorrano in un punto le forze S', S'', S'''.... le quali riferite a tre assi ortogonali che chiamerò gli assi delle x, delle y e delle z, faccian con essi rispettivamente gli angoli α', β', γ'; α'', β'', γ''; α''', β''', γ''';.... Si cerca la risultante S, e gli angoli α, β, γ che essa fa coi tre assi.

Risolvo ciascuna delle forze date in tre parallele ai tre assi (29) e chiamando P la somma di quelle parallele alle x, Q la somma delle parallele alle y, R la somma delle parallele alle z, avrò (15)

$$(A)\begin{cases} P = S' \text{ cos. } \alpha' + S'' \text{ cos. } \alpha'' + S''' \text{ cos. } \alpha'''... \\ Q = S' \text{ cos. } \beta' + S'' \text{ cos. } \beta'' + S''' \text{ cos. } \beta'''... \\ R = S' \text{ cos. } \gamma' + S'' \text{ cos. } \gamma'' + S''' \text{ cos. } \gamma'''... \end{cases}$$

Componendo poscia le tre forze P, Q, R (27) ottengo

$$S = \sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)}$$

$$\text{cos. } \alpha = \frac{P}{S}\text{; cos. } \beta = \frac{Q}{S}\text{; cos. } \gamma = \frac{R}{S}.$$

31. *Coroll.* Viceversa sia data la forza S che faccia gli angoli α, β, γ colle coordinate x, y, z e si voglia risolverla in più forze.

La risolvo prima in tre P, Q, R parallele ai tre assi, e queste riusciranno (29) $P = S \cos. \alpha$, $Q = S \cos. \beta$; $R = S \cos. \gamma$. Ciascheduna di queste tre potrà poscia risolversi ad arbitrio in più forze S', S'', S'''... mediante le equazioni (A) ove le indeterminate S', S''... α', β'... α'', β''... potranno tutte assumersi come più piace, a riserva di tre.

32. *Proposiz. IV.* Sulla curva AMB (Fig. 3) riferita a due assi ortogonali sia il punto M sollecitato dalla forza P nel senso delle x, e dalla forza Q nel senso delle y. A queste due forze si vogliono sostituire altre due: l'una T che agisca secondo la tangente MT, l'altra N che agisca secondo la normale MN.

Considerando il triangolo differenziale della curva, del quale è l'ipotenusa $Mm = ds$, ed i cateti $Mr = dx$, $mr = dy$ scorgesi che la tangente MT fa colle x un angolo che ha per coseno $\frac{dx}{ds}$, e colle y un angolo che ha per coseno $\frac{dy}{ds}$. Pel contrario l'angolo della normale MN colle x ha per coseno $\frac{dy}{ds}$, e colle y ha per coseno $\frac{dx}{ds}$.

Ciò posto, risolvendo la forza P in due, l' una secondo la tangente, l' altra secondo la normale, sarà (28) la prima $\frac{P\,dx}{ds}$, la seconda $\frac{P\,dy}{ds}$. E similmente la forza Q dà la componente tangenziale $\frac{Q\,dy}{ds}$, e la componente normale $\frac{Q\,dx}{ds}$.

Ora le due componenti tangenziali sono cospiranti, le due componenti normali sono opposte tra loro. Dunque (15)

$$T = \frac{P\,dx + Q\,dy}{ds}\,;\; N = \frac{P\,dy - Q\,dx}{ds}.$$

Se alcuna delle forze P, Q agisse in senso opposto alle rispettive coordinate x, y dovrebbe assumersi negativa.

33. *Coroll.* Viceversa date due forze T, N l' una diretta secondo la tangente MT, l' altra secondo la normale MN si potranno sostituir loro altre due forze P, Q agenti nel senso delle x, e delle y.

Poichè la forza T darà la componente $\frac{T\,dx}{ds}$ nel senso delle x, e la componente $\frac{T\,dy}{ds}$ nel senso delle y: e la forza normale

N darà la componente $\frac{N\,dy}{ds}$ secondo le x, e la componente $\frac{N\,dx}{ds}$ secondo le y. Ora le componenti nel senso delle x sono cospiranti, e le componenti nel senso delle y sono opposte. Sarà dunque

$$P = \frac{T\,dx + N\,dy}{ds}\,;\; Q = \frac{T\,dy - N\,dx}{ds}$$

i quali valori potean anco trarsi immediatamente da quelli dell'articolo precedente.

Se alcuna delle due forze T, N agisse in senso contrario a quello che qui le viene supposto, dovrebbe assumersi negativa.

CAP. IV.

Composizione delle forze parallele.

34. PROPOSIZIONE. Se due forze parallele ed agenti per lo stesso verso sono applicate a due punti A, B connessi invariabilmente fra loro, la risultante è parallela alle forze componenti, eguale alla loro somma, e divide la retta AB in parti reciprocamente proporzionali alle forze stesse.

Sieno le due forze parallele AP, BQ

(Fig. 4). Ai punti A, B s' intendano applicate due forze eguali ed opposte AM, BN di qualunque grandezza, dirette secondo la AB prolungata, e compiuti i parallelogrammi si segnino le diagonali AX, BY. Siccome le due forze aggiunte AM, BN si elidono scambievolmente, così la risultante delle due forze AP, BQ è la stessa che quella delle quattro forze AP, AM; BQ, BN: ossia delle due AX, BY. Si prolunghino AX, BY sicchè s' incontrino nel punto S, e s' intendano entrambe le forze AX, BY trasportate in S, e risoluta ciascuna d' esse in due, l' una secondo KL parallela ad AB, l' altra secondo SG parallela alle forze AP, BQ. Risulterà da questa decomposizione (15) secondo KL una forza $= AM - BN = 0$: e secondo SG una forza $= AP + BQ$. Adunque la risultante delle due forze AP, BQ è parallela alle medesime, ed eguale alla loro somma.

Di più è $AP : PX :: SG : AG$, e $BQ : QY :: SG : GB$; onde essendo $PX = QY$ risulta $AP . AG = BQ . BG$ ossia $AP : BQ :: BG : AG$.

35. *Coroll. I.* Se le due forze AP, BQ (Fig. 5) agiscano in senso opposto l' una all' altra, sarà la risultante eguale alla loro differenza, agirà nel senso della forza prevalente, ed il punto G non cadrà più nell'

intervallo AB delle due forze, ma fuori, e dalla parte della forza che prevale. E sarà tuttavia $AP : BQ :: BG : AG$.

36. *Coroll. II* Sia un sistema di punti A, B, C, D, (Fig. 6) tra loro invariabilmente connessi, e sollecitati dalle forze parallele P, Q, R, S. Debba trovarsi la loro risultante.

Congiunta AB, si divida in E in ragion reciproca delle forze P, Q. Passerà per E la risultante delle due forze P, Q ad esse parallela, ed eguale a $P + Q$. Similmente congiunta EC si tagli in F in ragion reciproca delle forze $P + Q$ ed R. Passerà per F la risultante delle tre forze P, Q, R ad esse parallela ed $= P + Q + R$. Infine congiunta FD, si divida in G in ragion reciproca delle forze $P + Q + R$ ed S. Passerà per G la risultante delle quattro forze P, Q, R, S eguale alla loro somma, e colla direzione GX ad esse parallela. Similmente si procede per qualunque numero di forze.

Se alcuna delle forze agisse in senso opposto alle altre, si opera come s'è indicato all'articolo precedente.

CAP. V.

Risoluzione d'una forza in altre ad essa parallele.

37. Come di più forze parallele si compone una, così una forza data può risolversi per una operazione inversa in più altre ad essa parallele, ed equivalenti. Quando non è dato che il numero delle forze nelle quali vuolsi decomporre la proposta, la risoluzione può farsi in infinite guise, ed è il problema indeterminato. Rendesi però determinato aggiungendo altre condizioni: di che daranno esempio i seguenti problemi.

38. *Proposizione I.* Risolvere la forza S applicata al punto G (Fig. 4) in due forze P, Q applicate ai punti dati A, B della retta AGB.

Sarà per l'art. 34.

$$S : P : Q :: AB : BG : AG$$

39. *Coroll.* Qui se i due punti A, B prendono in mezzo il punto G, le due forze P, Q agiranno per lo stesso verso della data S, che sarà eguale alla loro somma: ma se giacciono entrambi dalla stessa parte del punto G (Fig. 5) la forza P applicata al punto più vicino A cospirerà colla forza S, voglio dire agirà nello stesso senso, l'altra

forza Q agirà in senso contrario; e sarà la forza S eguale alla differenza delle due P, Q.

40. *Proposizione II.* Risolvere la forza S applicata al punto G (Fig. 7) in tre forze P, Q, R applicate a tre punti dati A, B, C.

Si uniscano i punti dati, onde risulti il triangolo $A\,B\,C$, il quale colle rette $G\,A$, $G\,B$, $G\,C$, resti diviso ne' triangoli $A\,G\,B$, $A\,G\,C$, $B\,G\,C$. Sarà

$$S : P : Q : R :: A\,B\,C : B\,G\,C : A\,G\,C : A\,G\,B.$$

Dim. (*a*) Si prolunghi $A\,G$ in E; e decompongasi prima la forza S in due P, X applicate a' punti A, E; indi la forza X in due Q, R applicate a' punti B, C. Sarà (38)

$$S : P : X :: A\,E : G\,E : G\,A$$
$$X : Q : R :: B\,C : C\,E : B\,E$$

onde si trae

$$S : P : Q : R :: A\,E.\,B\,C : G\,E.\,B\,C : G\,A.\,C\,E : G\,A.\,B\,E$$

Ora i quattro prodotti

$$A\,E.\,B\,C;\ G\,E.\,B\,C;\ G\,A.\,C\,E;\ G\,A.\,B\,E$$

sono proporzionali ai quattro triangoli

$$A\,B\,C;\ B\,G\,C;\ A\,G\,C;\ A\,G\,B$$

giacchè ognuno di questi triangoli è rappresentato dal corrispettivo prodotto moltiplicato per la metà del seno dell' angolo $A\,E\,B$. Dunque ec.

(a) *Euler Novi Comm. Petr. Tom. XVIII. Bossut Mechan.* §. 281.

41. *Coroll.* Se il punto G cade fuori del triangolo ABC, le tre forze P, Q, R non agiranno tutte per lo stesso verso della forza S. Cada il punto G entro l'angolo A del triangolo, le forze agenti sui vertici B, C cospireranno colla S, la forza agente sul vertice A sarà opposta. Avverrà il contrario se il punto G cade nell'angolo opposto verticalmente all'angolo A.

42. *Scolio.* Se i tre punti A, B, C sono nella stessa linea retta, il problema diviene indeterminato, e lo stesso accade se i punti dati sono più di tre. Il che fra poco dimostreremo.

CAP. VI.

Del Centro delle forze parallele.

43. PROPOSIZIONE *I.* In ogni sistema di forma invariabile animato da forze parallele havvi un punto per cui passa la risultante delle forze, qualunque sia la posizion del sistema.

Questo punto ha il nome di *centro delle forze parallele*.

Dim. Sia il sistema de' punti A, B, C, D (Fig. 6) animati dalle forze P, Q, R, S. Si trovi come all'art. 36. il punto G per cui passa la risultante GX. Ora io dico che

comunque si cangi la posizion del sistema, purchè le forze conservino i loro valori e si mantengano parallele, la risultante seguirà sempre a passare pel punto G del sistema. Imperocchè comunque il sistema si volga o si pieghi, sempre il punto E taglierà la AB in ragion reciproca delle forze P, Q; ed il punto F taglierà tuttavia la EC in ragion reciproca di $P+Q$, ed R; ed il punto G la FD in ragion reciproca di $P+Q+R$, ed S: onde (36) la risultante passerà sempre per G.

44. *Coroll. I.* Adunque nel centro delle forze parallele si può intendere concentrata e raccolta la somma di tutte le forze; riducendosi così ogni sistema di forze parallele ad un sol punto animato da una forza sola. E sostenuto quel punto, il sistema si rimane in ogni positura equilibrato.

45. *Coroll. II.* In due modi si può procedere alla ricerca del centro delle forze parallele. Il primo consiste nella costruzione insegnata all'art. 36. L'altro modo si deduce dal primo, e consiste nel determinarne la posizione analiticamente, come tosto mostreremo.

46. *Proposizione II.* Siano i punti A, B, C.... animati dalle forze parallele P, Q, R... Riferito il sistema a tre assi ortogonali, siano le coordinate di quei punti x, y, z;

x', y', z'; x'', y'', z'';.... Le coordinate del centro delle forze parallele saranno

$$X=\frac{Px+Qx'+Rx''...}{P+Q+R...};\quad Y=\frac{Py+Qy'+Ry''...}{P+Q+R...};$$

$$Z=\frac{Pz+Qz'+Rz''...}{P+Q+R...}$$

Dim. Consideriamo da prima i due punti A, B (Fig. 8) animati dalle forze P, Q e determinati dalle ascisse $OA'=x$, $OB'=x'$. Sia E il centro delle due forze P, Q e gli corrisponda l'ascissa $OE'=\xi$. Sarà (34) $P:Q::BE:AE::B'E':A'E'::x'-\xi:\xi-x$. Quindi $(P+Q)\xi=Px+Qx'$.

Ora s'intenda congiunto il punto E col terzo C del sistema, cui corrisponde la forza R, e l'ascissa x''. Sia F il centro delle due forze $P+Q$ ed R, e gli corrisponda l'ascissa ξ'. Avremo allo stesso modo

$$(P+Q+R)\xi'=(P+Q)\xi+Rx''$$

ossia, sostituendo il valor precedente

$$(P+Q+R)\xi'=Px+Qx'+Rx''.$$

E così procedendo sino ad incontrare il centro di tutte le forze, cui corrisponde l'ascissa X, otterremo

$$(P+Q+R...)X=Px+Qx'+Rx''....$$

Riferendo adesso la posizione de' punti successivamente agli assi delle y, e delle z avremo similmente

$$(P+Q+R....)Y=Py+Qy'+Ry''...$$
$$(P+Q+R....)Z=Pz+Qz'+Rz''...$$

dalle quali equazioni si traggono gli annunciati valori di X, Y, Z.

47. *Scolio*. Questi valori ponno scriversi più concisamente così

$$X = \frac{\Sigma . Px}{\Sigma . P} ; \; Y = \frac{\Sigma . Py}{\Sigma . P} ; \; Z = \frac{\Sigma . Pz}{\Sigma . P}$$

disegnando $\Sigma . Px$ la somma de' prodotti di ciascheduna forza nella rispettiva ascissa, e $\Sigma . P$ la somma delle forze etc.

48. *Coroll. I.* Se i punti del sistema giacciono tutti in un piano, prendendo su questo piano le coordinate x, y svaniscono le z, e rimangono le sole equazioni $X = \frac{\Sigma . Px}{\Sigma . P}$; $Y = \frac{\Sigma . Py}{\Sigma . P}$. E se i punti del sistema cadon tutti in una stessa retta, prendendo questa per asse delle x, svaniscono anche le y, e resta l'equazion sola $X = \frac{\Sigma . Px}{\Sigma . P}$.

49. *Momento* d'una forza rispetto d'un punto, d'una retta, d'un piano chiameremo il prodotto di essa forza per la distanza del punto cui essa è applicata da quel punto, da quella retta, da quel piano.

Il punto, la retta, il piano al quale si riferiscono i momenti diconsi *centro*, *asse*, *piano de' momenti*.

Talora la voce momento adoprasi in altro senso; e ne avvertiremo, ove occorra.

50. *Coroll II.* In ogni sistema di forze parallele il momento della risultante rispetto d'un piano qualunque è uguale alla somma de' momenti delle componenti.

Infatti rispetto del piano y, z che può essere un piano qualunque, il momento della risultante è $= X\Sigma . P$; e la somma de' momenti delle componenti è $= \Sigma . Px$. Ora queste due quantità sono uguali.

Vale lo stesso pei momenti riferiti ad un asse, se i punti d'applicazione delle forze giacciono tutti nello stesso piano; e pe' momenti riferiti ad un centro, se i punti d'applicazione delle forze cadono tutti nella stessa linea retta.

51. *Coroll. III.* Se il centro, o l'asse, o il piano de' momenti passano pel centro delle forze parallele, la somma de' momenti delle forze è nulla.

52. *Coroll. IV.* Dalle cose sin quì dette si traggono le formole che determinano la risultante di più forze parallele, date le componenti, o viceversa. Siano le forze parallele P, Q, R.... e condotto un piano qualunque attraverso le loro direzioni, sieno x, y; x', y'; x'', y''.... le coordinate de' punti pe' quali passano le forze P, Q, R.... Dicasi S la risultante, ed X, Y le coordi-

nate di quel punto del piano per dove passa. Avremo le tre equazioni

$$S = P + Q + R....$$
$$SX = Px + Qx' + Rx''....$$
$$SY = Py + Qy' + Ry''....$$

Quì se date le componenti si cerca la risultante, si vede subito tante essere le incognite quante le equazioni; onde il problema è determinato: ma se data la risultante si vogliono le componenti, il problema è di sua natura indeterminato.

Volendosi che le componenti passino per dati punti del piano, saranno date le coordinate x, y; x', y'.... e rimarranno solo a determinarsi le componenti stesse P, Q, R.... Ove scorgesi facilmente che il problema riuscirà determinato allorchè i punti dati siano due; ovvero tre, ma che non giacciano nella stessa retta: il che prova ciò che abbiamo asserito sul fine del Capo precedente.

CAP. VII.

Del Centro di Gravità.

53. *Ipotesi*. Ogni particella elementare di materia è continuamente animata da una forza per cui viene spinta a cadere per una retta perpendicolare al piano tangente la superficie dell' acque stagnanti. Questa forza

è sensibilmente eguale in tutte le particelle materiali, e costante in ciascuna. Per essa cadendo liberamente descrivono nel primo 1" della discesa lo spazio di metri 4, 9044.

Vedremo a suo luogo le prove di questa proposizione, e l'eccezioni cui va soggetta; per ora saremo contenti d'assumerla siccome ipotesi.

54. Dicesi questa forza *gravità*; il piano tangente la superficie dell'acque stagnanti dicesi *piano orizzontale*; la retta perpendicolare a questo piano dicesi *verticale*.

Le verticali non troppo distanti fra loro sono sensibilmente parallele, e perciò le direzioni della gravità comprese fra non lunghi intervalli ponno aversi come parallele.

55. *Peso* o *peso assoluto* d'un corpo è la risultante di tutte le forze di gravità che animano ciascuno de' suoi elementi. Questa risultante è eguale alla loro somma, e perciò il peso è proporzionale alla massa.

56. *Peso specifico* o *gravità specifica* d'un corpo è il rapporto del suo peso assoluto al suo volume. Quindi il peso specifico è proporzionale alla densità.

57. *Centro di gravità* d'un corpo è il centro delle forze parallele di gravità che animano ciascuno de' suoi elementi. Il peso del corpo può intendersi (44) riunito e raccolto nel centro di gravità. In simil guisa centro

di gravità d'un sistema di più corpi, è il centro de' pesi de' corpi componenti il sistema. Ognuno di questi pesi deve intendersi riunito nel centro di gravità del rispettivo corpo.

58. *Coroll.* Il centro di gravità può trovarsi meccanicamente, sospendendo il grave, o qualche suo modello per due punti diversi. L'intersezione delle verticali che passano pei punti di sospensione sarà il centro di gravità.

Geometricamente poi si trova coi metodi insegnati per trovare il centro delle forze parallele, agli art. 36 e 46.

Si suole ancora cercare il centro di gravità delle linee e figure geometriche, supponendo gli elementi loro gravi ed omogenei. Questa ricerca sarà l'oggetto de' tre Capi seguenti.

CAP. VIII.

Ricerca del centro di gravità delle linee e figure più semplici.

59. *Proposizione I.* Le linee o figure simmetriche attorno un punto, un asse, un piano hanno il loro centro di gravità in quel punto, in quell'asse, in quel piano.

60. *Proposizione II.* Il centro di gravità d'un triangolo trovasi ai due terzi della retta che da un angolo si conduca al punto di mezzo del lato opposto.

Sia (Fig. 9) il triangolo ABC. Divisi per metà due lati qualunque in D ed E si conducano dagli angoli opposti le rette AD, BE. Risolvendo il triangolo in trapezj elementari per via di rette parallele al lato BC, egli è chiaro che la retta AD che taglia per metà tutte queste rette, passa pei centri di gravità di tutti gli elementi del triangolo, e perciò ancora pel centro di gravità del triangolo stesso. Ma per egual ragione anche la retta BE passa pel centro di gravità del triangolo. Dunque questo centro è nell'intersezione G delle due rette AD, BE.

Ora congiunta DE, essa taglia i lati BC, AC in parti proporzionali; dunque è parallela ad AB, e i triangoli AGB, DGE sono simili. Quindi

$$AG \cdot GD :: AB : DE :: BC : DC.$$

Ma BC è doppia di DC per costruzione. Dunque AG è doppia di GD, e per conseguenza $AG = \frac{2}{3} AD$.

61. *Coroll.* Per le due proposizioni precedenti potrà trovarsi il centro di gravità del perimetro o dell'area d'un poligono qualunque, adoprandovi il metodo dell'art. 36. oppure quello dell'art. 46.

60. *Proposizione III.* Il centro di gravità d'una piramide triangolare trovasi ai tre quarti della retta che dal vertice si conduca al centro di gravità della base.

Sia (Fig. 10) la piramide $VABC$. Tirata AD che tagli per mezzo BC in D, e preso $AE = \frac{2}{3} AD$, sarà E il centro di gravità della base, o sia del triangolo ABC. Similmente congiunta VD, e preso $VF = \frac{2}{3} VD$, sarà F il centro di gravità della faccia triangolare BVC. Si congiungano VE, AF.

Ora risolvendo la piramide ne' suoi elementi per mezzo di piani paralleli alla base ABC, è manifesto che la retta VE passa pei centri di gravità di tutti gli elementi della piramide. Adunque il centro della piramide dee cadere sulla VE. Per egual ragione dee cadere sulla AF. Cadrà dunque nell'intersezione G delle rette VE, AF.

Ma congiunta EF, questa divide i lati AD, VD in parti proporzionali; dunque è parallela ad VA, e i triangoli AGV, FGE sono simili. Quindi

$$VG : CE :: VA : FE :: AD : DE.$$

Ma AD è tripla di DE per costruzione. Dunque VG è tripla di GE, e però $VG = \frac{3}{4} VE$.

63. *Corollario I.* Questa proposizione si estende ad una piramide qualunque ed al cono.

Imperocchè condotta una retta dal vertice al centro di gravità della base, è manifesto in primo luogo che il centro della piramide dee trovarsi su questa retta, passando essa per tutti i centri degl' infiniti elementi ne' quali la piramide si risolvesse mediante piani paralleli alla base.

Intendasi ora la base della piramide divisa in triangoli per via di diagonali, e la piramide stessa divisa in altrettante piramidi triangolari con piani condotti pel vertice e per queste diagonali. Se conduco un piano parallelo alla base della piramide, ed ai tre quarti della sua altezza, contando dal vertice, questo piano passerà (62) per tutti i centri delle piramidi triangolari. Dovrà dunque passare anche pel centro della piramide data: il quale per conseguenza si troverà ai tre quarti della retta che unisce il vertice col centro di gravità della base.

E ciò vale per quante siano le faccie della piramide; dunque ancora per la piramide ad infinite faccie, o sia pel cono.

64. *Coroll. II.* Di quì può trovarsi il centro di gravità d' un poliedro qualunque, potendosi ogni poliedro risolvere in piramidi.

CAP. IX.

Formole pel centro di gravità delle linee e de' piani.

65. PROPOSIZIONE *I.* Pel centro di gravità d'un arco curvilineo s, essendo le coordinate x, y hassi

$$X=\frac{\int x\,ds}{s}\ ,\ Y=\frac{\int y\,ds}{s}\ .$$

Infatti abbiamo generalmente (48)

$$X=\frac{\Sigma.\,Px}{\Sigma.\,P}\ ;\ Y=\frac{\Sigma.\,Py}{\Sigma.\,P}\ .$$

Ora qui la forza P è proporzionale all'elemento dell'arco, che è ds. Dunque ec.

66. *Corollario I.* Se l'arco è simmetrico attorno l'asse delle x, il centro cade su quest'asse, Y s'annulla, e basta l'equazione $X=\frac{\int x\,ds}{s}$.

67. *Coroll. II.* Se l'arco fosse a doppia curvatura, converrebbe riferirne la posizione a tre assi, e sarebbe

$$X=\frac{\int x\,ds}{s}\ ;\ Y=\frac{\int y\,ds}{s}\ ;\ Z=\frac{\int z\,ds}{s}$$

68. *Coroll. III.* Applicando queste formole alla ricerca del centro di gravità d' un arco di circolo, trovasi questo centro sul raggio che divide l'arco per metà; e la sua distanza dal centro del circolo è quarta proporzionale dopo l'arco, la sua corda, ed il raggio.

69. *Proposizione II.* Pel centro di gravità d' una superficie piana, trovasi

$$X = \frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx}; \quad Y = \frac{\frac{1}{2}\int y^2\,dx}{\int y\,dx}.$$

Si dimostra come sopra, osservando che l'elemento della superficie è $= y\,dx$.

Basterebbe la prima delle due equazioni, se la superficie proposta fosse simmetrica attorno la linea delle x.

70. *Corollario*. Ponno servir d' esercizio le applicazioni seguenti.

1. Un trapezio di basi parallele ha il suo centro di gravità sulla retta che biseca le basi. Siano le basi p, q; ed a la retta che le taglia per mezzo. Su questa retta l'intervallo tra il centro di gravità e la base p è

$$= \frac{a}{3} \cdot \frac{p+2q}{p+q}.$$

2. Un segmento di circolo ha il suo centro di gravità sul raggio che lo divide per mezzo; e la sua distanza dal centro del cir-

colo è $\frac{1}{12}$ del cubo della corda, diviso per l'area del segmento.

3. Un settore di circolo ha il suo centro di gravità sul raggio che lo divide per mezzo; e la sua distanza dal centro del circolo è quarta proporzionale dopo l'arco, la sua corda, e li $\frac{2}{3}$ del raggio.

CAP. X.

Formole pel centro di gravità delle superficie e de' solidi di rivoluzione.

71. PROPOSIZIONE *I.* Il centro di gravità d'una superficie curva di rivoluzione è sull'asse alla distanza dall'origine

$$X = \frac{\int xy\,ds}{\int y\,ds}.$$

Questo valore si deduce agevolmente, osservando che l'elemento della superficie è $= 2\pi y\,ds$, detto π il rapporto della circonferenza al diametro.

72. *Corollario*. Il centro di gravità d'una calotta, o d'una zona sferica è nel punto di mezzo della saetta.

73. *Proposizione II.* Il centro di gravità d'un solido di rivoluzione è sull' asse alla distanza dall' origine

$$X = \frac{\int x y^2 dx}{\int y^2 dx}.$$

Il qual valore agevolmente ricavasi, avvertendo che l'elemento del solido è $= \pi y^2 dx$.

74. *Corollario.* Applicando questa formola a rintracciare il centro di gravità di varj solidi, s' incontrano i risultati seguenti; si noti che le ascisse si prendono dal vertice della curva che rotando genera il solido.

1. Per un segmento sferico di raggio a

$$X = \frac{3a - 3x}{12a - 4x} \cdot x$$

2. Per un settore sferico

$$X = \frac{1}{8}(2a + 3x)$$

3. Per l' emisfero

$$X = \frac{5}{8} a$$

4. Per un segmento di paraboloide

$$X = \frac{2}{3} x$$

5. Per un segmento d'ellissoide, chiamando a il semiasse di rivoluzione, viene come pel segmento sferico

$$X = \frac{8a - 3x}{12a - 4x} \cdot x$$

6. Per un segmento d' iperboloide

$$X = \frac{8a + 3x}{12a + 4x} \cdot x$$

Questo valore è sempre compreso fra li $\frac{2}{3}$ e li $\frac{3}{4}$ dell'ascissa x.

CAP. XI.

Uso del centro di gravità per la misura delle superficie e de' solidi di rivoluzione.

75. PROPOSIZIONE *I.* La superficie generata dalla rivoluzione d' un arco è uguale all' arco stesso moltiplicato pel viaggio del suo centro di gravità.

Il centro di gravità descrive una circonferenza di raggio Y; quindi il suo viaggio è $= 2\pi Y$. Ora (65) $Y = \frac{\int y\,ds}{s}$. Dunque il viaggio del centro di gravità dell'arco moltiplicato per l' arco stesso è $= 2\pi \int y\,ds$; che è appunto il noto valore della superficie generata dalla rotazione dell' arco s attorno l' asse delle x.

76. *Coroll.* Se più archi si avvolgono attorno un asse comune, la somma o la differenza delle superficie da essi generate è uguale alla somma o alla differenza degli archi stessi moltiplicata pel viaggio del comune loro centro di gravità.

Sieno gli archi s, s', s''.... e le ordinate de' loro centri di gravità v, v', v''.... Le superficie da essi generate saranno (75) $2\pi sv$, $2\pi s'v'$.... e la loro somma $2\pi(sv+s'v'....)$

Il centro di gravità comune di tutti gli archi averà per ordinata (46) $\frac{sv+s'v'+s''v''...}{s+s'+s''...}$ e però moltiplicando il viaggio di questo centro comune per la somma degli archi stessi $s+s'+s''$.... risulterà $2\pi(sv+s'v'+s''v''....)$ Dunque etc. Vale lo stesso discorso per la differenza.

77. *Proposizione II.* Il solido generato dalla rivoluzione d' una superficie piana, è uguale alla superficie stessa moltiplicata pel viaggio del suo centro di gravità.

Quì abbiamo (69) $Y=\frac{\frac{1}{2}\int y^2\,dx}{\int y\,dx}$. Dunque la superficie moltiplicata pel viaggio del centro di gravità è $=\pi\int y^2\,dx$, nota espressione del solido generato.

78. *Corollario*. E se attorno lo stesso asse girino più superficie, la somma o la differenza de' solidi da esse prodotti eguaglia la somma o la differenza delle superficie stesse moltiplicata pel viaggio del comune loro centro di gravità.

79. *Proposizione III.* Se una retta si move in guisa che rimanga sempre perpendicolare alla linea descritta dal suo centro di gravità, la superficie generata dal moto di questa retta è uguale alla retta medesima moltiplicata pel viaggio del suo centro di gravità.

E lo stesso vale d'un piano che movendosi alla guisa indicata generi un solido.

Diffatti ogni elemento della superficie o del solido generato sarà uguale al prodotto della retta o della superficie generatrice per l'elemento corrispondente della linea percorsa dal centro di gravità.

CAP. XII.

Modo di trovare per approssimazione le superficie, le solidità, e i centri di gravità delle figure, delle quali non abbiasi l'equazione.

80. QUALORA d'una proposta curva non abbiasi l'equazione, nè il valore delle figure

terminate da essa curva o generate dal suo ravvolgimento, nè il sito de' loro centri di gravità non può aversi altrimenti che per via d'approssimazione. Il mezzo d'approssimazione più ovvio consiste nel segnar molte ordinate a brevi ed eguali intervalli, e considerar poscia gli archetti compresi come rettilinei, trasformando così la curva in un poligono. Si ottiene però maggiore accuratezza senza maggior fatica di calcolo, considerando invece quegli archetti siccome altrettanti archi parabolici, giusta l'ingegnoso metodo immaginato da Simpson. Qui ne raccoglieremo i risultati (a) lasciando agli studiosi la cura di rintracciarne la dimostrazione con vantaggioso esercizio di calcolo.

81. *Proposizione I.* Sia proposto di misurare (Fig. 11) il piano $XLL'X'$.... Condotto a traverso un asse qualunque AS, si divida in un numero pari di parti eguali AP, PQ, QR.... e pei punti di divisione si conducano le ordinate AL, PM, QN... perpendicolari all'asse. Chiamerò $AP=PQ=QR...=h$; ed $AL=y_1$, $PM=y_2$, $QN=y_3$,... L'area $ALXS$ sarà espressa da questa formola

$$\frac{1}{3}h\left\{y_1+4y_2+2y_3+4y_4+2y_5+4y_6....+y_n\right\}$$

(a) *Prony Architect. Hydraul. Tom. I.* §. 223.

In simil guisa si troverà l'area $ALX'S$ onde aggiungerla alla precedente; e se la curva inferiore $L'X'$ fosse eguale alla superiore LX e similmente situata rispetto dell'asse, basterà in tal caso raddoppiare il valore trovato dell'area $ALXS$.

L'esposta formola è dedotta dal supposto che l'arco LMN sia un arco di parabola avente per diametro MP, e l'arco NOX un arco di parabola avente per diametro OR, e così gli altri: supposto che non può trarre ad error notabile, quando quegli archi sian piccoli.

82. *Coroll. I.* In simil guisa per un solido terminato da una superficie curva qualunque, chiamando s_0, s_1, s_2..... le aree delle sezioni fatte perpendicolarmente all'asse AS, sarà la solidità

$$\frac{1}{3}h\left\{s_0+4s_1+2s_2+4s_3+2s_4+4s_5....+s_n\right\}$$

83. *Coroll. II.* Se il solido è prodotto dalla rivoluzione della curva LX attorno l'asse AS, avremo $s=\pi y^2$; onde l'espressione della solidità diviene

$$\frac{\pi}{3}h\left\{y_0^2+4y_1^2+2y_2^2+4y_3^2+2y_4^2+4y_5^2....+y_n^2\right\}$$

84. *Scolio.* Se in vece di riguardare gli archi LMN, NOX.... come parabolici, si fossero considerati gli archetti LM, MN, NO, OX.... come altrettanti latercoli ret-

tilinei, avremmo ottenuto pel valore dell'area $ALXS$ l'espression seguente

$$\frac{1}{2}h\left\{y_0+2y_1+2y_2+2y_3+2y_4+2y_5+2y_6\ldots+y_n\right\}$$

e simili sarebbero state l'espressioni della solidità.

85. *Proposizione II.* Sia $XLL'X'$ una superficie terminata da due curve eguali e simili LX, $L'X'$ e divisa per mezzo dall'asse AS. Il di lei centro di gravità cade sull'asse AS ad una distanza dal punto A espressa dalla formola seguente

$$h\,\frac{0.y_0+1.4y_1+2.2y_2+3.4y_3+4.2y_4\ldots+(n-1)y_n}{y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4\ldots\ldots+y_n}$$

86. *Corollario.* Simile è l'espressione per un solido simmetrico attorno l'asse AS, purchè invece delle ordinate y_0, $y_1\ldots$. si pongano le sezioni s_0, $s_1\ldots$. fatte perpendicolarmente all'asse; se poi è solido di rivoluzione, le suddette sezioni saranno rappresentate per πy_0^2, $\pi y_1^2\ldots$.

87. *Scolio.* Che se le curve LX si fossero riguardate come poligoni coi latercoli LM, $MN\ldots$. la formola sarebbe stata la seguente (a)

$$\frac{1}{3}h\,\frac{y_0+1.6y_1+2.6y_2+3.6y_3+4.6y_4\ldots+(3n-4)y_n}{y_0+2y_1+2y_2+2y_3+2y_4\ldots\ldots+y_n}$$

(a) *Bezout Cours de Math. pour la Marine. Tom. IV.* §. 299.

CAP. XIII.

Dell' equilibrio delle forze concorrenti in un punto.

88. PROPOSIZIONE. Sia un punto, o elemento materiale libero e sollecitato da quante si vogliano forze. Se la risultante di queste forze sarà nulla, vi sarà equilibrio; e viceversa.

89. *Corollario*. Decomposta ciascuna delle forze in tre P, Q, R parallele a tre assi ortogonali, richiedesi per l'equilibrio che sia

$$\Sigma . P = 0 \; ; \; \Sigma . Q = 0 \; ; \; \Sigma . R = 0 .$$

90. *Scolio I.* Se il punto è fermato a un appoggio che non gli permetta veruna sorte di moto, sussiste l'equilibrio per quante siano le forze sollecitanti, e l'appoggio è premuto o tratto con tanta forza quanta è la risultante delle forze applicate.

91. *Scolio II.* Se il punto è sospeso da un fulcro per mezzo d'una verga, richiedesi per l'equilibrio che la risultante delle forze applicate passi pel fulcro. Che se pendesse da un filo, si esige di più che quella risultante non sospinga il punto contro del fulcro, ma in direzione contraria. Quanta è poi la risultante, tanta è la forza che tende il filo o la verga, e tanta pur è la pressione che il fulcro sostiene.

92. *Scolio III.* Finalmente se il punto posa su d' una linea, o superficie resistente, si richiede per l' equilibrio che la risultante delle forze applicate sia perpendicolare a quella linea o superficie, e che spinga il punto contro della medesima.

CAP. XIV.

Del Momento di rotazione.

93. Sia un sistema di forma invariabile volubile intorno un asse, e ad alcun de' suoi punti sia applicata una forza che agisca in un piano perpendicolare a quell' asse. Il prodotto della forza per la distanza della sua direzione dall' asse di rotazione dicesi *Momento della forza per far girare il sistema attorno l' asse*.

Sia la forza AP (Fig. 12) in un piano perpendicolare all' asse Oo. Condotta in quel piano la AM perpendicolare ad AP, il prodotto $AP.AM$ è il momento della forza AP per aggirare il sistema attorno l' asse Oo.

94. *Scolio.* Se la forza AP giacesse in un piano obbliquo all' asse Oo, convien risolverla in due, delle quali la prima sia parallela ad Oo, la seconda giaccia in un pia-

no perpendicolare ad Oo. Questa seconda è la sola che tenda ad aggirare il sistema attorno l'asse; ed il momento di questa prendesi per momento della forza AP.

95. *Proposizione*. Sia un sistema rigido volubile attorno un asse, e siano applicate al sistema due forze che tendano ad aggirarlo in sensi contrarj. Se i momenti delle due forze saranno eguali, vi sarà equilibrio; e viceversa.

Siano le due forze AP, BQ tendenti ad aggirare il sistema attorno l'asse Oo in sensi contrarj co' momenti eguali $AP.AM$, $BQ.BN$. Queste agiranno (94) in piani perpendicolari all'asse Oo, e perciò tra di loro paralleli. Condotto per l'asse Oo un piano qualunque, siano Ma, Nb le comuni sezioni di questo piano coi due piani paralleli aMA, bNB ne' quali giacciono le forze AP, BQ. Prendo Ma, Nb eguali rispettivamente alle rette MA, NB. All' estremo a della retta Ma intendo applicate perpendicolarmente due forze opposte ap, ap' eguali fra loro, ed alla AP, e poste nel piano aMA. E similmente all' estremo della Nb s' applichino bq, bq' eguali fra loro, ed alla BQ, e poste nel piano bNB. Siccome queste nuove forze si elidono scambievolmente, così la risultante delle sei forze AP, ap, ap'; BQ, bq, bq' è la stes-

sa che quella delle due forze AP, BQ.

Consideriamo prima le due forze AP, ap'. Prolungate le loro direzioni, sicchè concorrano in R, e congiunta RM, è facile il vedere che questa RM taglierà per metà l'angolo PRp'. Ma la risultante delle due forze uguali AP, ap' deve appunto (25) dividere per metà il loro angolo PRp'. Dunque questa risultante coincide colla RM, ed attraversa l'asse Oo nel punto M. Similmente la risultante delle due BQ, bq' ha la direzione SN, ed attraversa l'asse nel punto N.

Rimangono le due forze ap, bq, le quali per costruzione sono parallele. Si congiunga ab, che tagli l'asse nel punto G. Essendo per ipotesi $AP.AM = BQ.BN$ sarà ancora $ap.aM = bq.bN$; o sia

$$ap : bq :: bN : aM :: bG : aG$$

Dunque (36) la risultante delle forze ap, bq passa ancor essa per l'asse nel punto G.

Così le sei forze equivalenti alle due AP, BQ si riducono a tre, ciascheduna delle quali passa per l'asse, onde non tende a far girare il sistema. Vi sarà dunque equilibrio.

Che se i momenti $AP.AM$, $BQ.BN$ non fossero eguali, neppur lo sarebbero $ap.aM$, $bq.bN$, e la risultante delle forze ap, bq non cadrebbe in G, ma di

quà o di là da quel punto sulla retta $a\,b$, onde il sistema roterebbe. Adunque se v' è equilibrio, è necessario che i momenti delle forze applicate siano eguali fra loro. Il che etc.

96. *Coroll. I.* Scorgesi dalla dimostrazione precedente, che per quanto riguarda l'equilibrio di rotazione attorno l'asse $O\,o$, alle forze $A\,P$, $B\,Q$ ponno sostituirsi delle altre come $a\,p$, $b\,q$ eguali alle prime, ma con direzioni comunque diverse, purchè queste direzioni giacciano sempre in piani perpendicolari all'asse $O\,o$, e conservino la stessa distanza dall'asse. Col qual mezzo le dette forze ponno rendersi tutte fra loro parallele.

97. *Coroll. II.* Si può ancora, salvo l'equilibrio di rotazione, alla forza $A\,P$ sostituirne un altra $\alpha\,\pi$ di valor diverso, cangiandone la distanza dall'asse; basta che sia $A\,P\,.\,A\,M = \alpha\,\pi\,.\,\alpha\,M$ onde si conservi lo stesso momento.

98. *Coroll. III.* Agiscano sul sistema più forze tendenti ad aggirarlo in sensi contrarj. Se la somma de' momenti di quelle che tendono a girarlo per un verso sarà eguale alla somma de' momenti di quelle che tendono a girarlo in contrario, vi sarà equilibrio; e viceversa.

Si riducano tutte le forze ad essere fra loro parallele (96); indi tutte quelle che ten-

dono a girare il sistema per lo stesso verso si riducano alla loro risultante P applicata al loro centro; e sia il momento di questa forza Pm. Similmente quelle che tendono in senso contrario si riducano ad una Q applicata al loro centro, e siane il momento Qn. Sarà (50) Pm la somma de' momenti delle prime, e Qn la somma de' momenti delle seconde. Dunque per ipotesi $Pm = Qn$. Dunque (95) vi sarà equilibrio.

CAP. XV.

Equilibrio d' un sistema di forma invariabile.

99. PROPOSIZIONE *I.* Sia un sistema rigido riferito a tre assi ortogonali (Fig. 13) OX, OY, OZ condotti per un punto O del sistema. Se in virtù delle forze applicate al sistema il punto O stia fermo; e di più il sistema non possa rotare nè attorno l'asse OX, nè attorno OY, nè attorno OZ, vi sarà equilibrio, e viceversa.

Prendasi in uno degli assi un punto qualunque, per esempio il punto X nell' asse OX. Stando fermo il punto O, nè potendo il sistema rotare attorno l' asse OZ, il punto X non potrà, attese le forze applicate al sistema, moversi nel piano XOY. Simil-

mente essendo fermo il punto O, nè potendo il sistema rotare attorno l' asse OY, il punto X non potrà, attese le forze applicate al sistema, moversi neppur nel piano XOZ. Dunque quel punto X sarà immobile; giacchè se pur descrivesse uno spazietto qualunque Xx, fatto il rettangolo $Xyxz$, la forza per cui avrebbe descritto lo spazio Xx equivarrebbe alle due Xy, Xz, la prima delle quali lo avrebbe mosso nel piano XOY, la seconda nel piano XOZ. Ma queste forze Xy, Xz sono nulle per le cose dette; dunque è nulla anche la forza Xx, ed il punto X è immobile.

In simil guisa si prova esser immobile un punto come Y preso ad arbitrio sull' asse OY.

Essendo poi nel sistema tre punti immobili O, X, Y non posti in linea retta, è forza che tutto il sistema sia pure immobile, ed equilibrato.

100. *Proposizione II.* Sia un sistema rigido sollecitato da quante si vogliano forze. Riferito il sistema a tre assi ortogonali, che chiamerò gli assi delle x, delle y, delle z, ciascuna forza sia decomposta in tre P, Q, R parallele ai tre assi. E siano x, y, z le coordinate del suo punto d' applicazione. L' equilibrio del sistema è determinato dalle sei equazioni seguenti

$$\Sigma.P=0;\ \Sigma.Q=0;\ \Sigma\ R=0$$
$$\Sigma.Py=\Sigma.Qx;\ \Sigma.Pz=\Sigma.Rx;\ \Sigma.Qz=\Sigma.Ry$$

Richiedesi per l'equilibrio (99) che l'origine delle ascisse stia ferma, nè possa rotare il sistema attorno veruno de' tre assi. Ora per la prima condizione è necessario (89) che sia $\Sigma.P=0;\ \Sigma.Q=0;\ \Sigma.R=0$.

A rotar poi il sistema attorno l'asse delle z tende ciascuna delle forze P col momento Py, ed a girarlo in senso contrario tende ciascuna delle forze Q col momento Qx. Adunque dev' essere (98) $\Sigma.Py=\Sigma.Qx$. Similmente affinchè il sistema non ruoti attorno l'asse delle y si troverà dover essere $\Sigma.Pz=\Sigma.Rx$; ed affinchè non giri attorno l'asse delle x, $\Sigma.Qz=\Sigma.Ry$.

101. *Coroll. I.* Delle sei equazioni dell' equilibrio, le prime tre esprimono che il sistema non può concepire verun *moto progressivo*; le tre ultime esprimono che non può neppur prendere alcun *moto rotatorio*.

102. *Coroll. II.* Se v'ha nel sistema un fulcro, o punto fisso, ogni moto progressivo viene impedito dalla resistenza del fulcro. Basterà pertanto che le forze P, Q, R non possano indurre alcun moto rotatorio; basteranno dunque per l'equilibrio le tre equazioni

$$\Sigma.Py=\Sigma.Qx;\ \Sigma.Pz=\Sigma\ Rx;\ \Sigma\ Qz=\Sigma.Ry.$$

103. *Coroll. III.* Se vi sono due punti fis-

si, o sia un asse fisso, il che torna lo stesso, allora il sistema non può prender che un moto di rotazione attorno quell' asse. Prendendolo pertanto per asse delle z, basterà per l' equilibrio la sola equazione

$$\Sigma . Py = \Sigma . Qx$$

CAP. XVI.

Pressioni sugli appoggi d' un sistema rigido equilibrato.

104. PROPOSIZIONE *I.* Sia un sistema rigido equilibrato, e sostenuto da un fulcro o pernio fisso. Tenendo ferme le denominazioni sino ad ora usate, le pressioni p, q, r che il pernio sostiene nel senso delle x, y, z sono determinate dall' equazioni

$$p = \Sigma . P ; \; q = \Sigma . Q ; \; r = \Sigma . R$$

Difatti le pressioni che sostiene il fulcro sono eguali e contrarie a quelle forze che vi si dovrebbono applicare per mantener l' equilibrio, nel caso che il fulcro si togliesse. Ora per le tre prime equazioni dell' equilibrio (100) è manifesto che vi si dovrebbero applicare in senso contrario alle x, y, z, le forze $\Sigma . P$, $\Sigma . Q$, $\Sigma . R$.

105. *Corollario*. Il fulcro sostiene lo sforzo delle potenze P, Q, R come se que-

ste gli fossero immediatamente applicate.

106. *Proposizione II.* Sia il sistema equilibrato attorno l'asse immobile OZ (Fig. 13) fisso in due punti, o pernj M, N. Si chiamino p, q, r le pressioni che sostiene nel senso delle x, y, z il pernio M cui corrisponde l'ascissa $OM = \zeta$, e siano similmente p', q', r' le pressioni sostenute dall'altro pernio N cui corrisponde l'ascissa $ON = \zeta'$. I valori delle pressioni si hanno dalle cinque equazioni che seguono

$$p + p' = \Sigma . P$$
$$q + q' = \Sigma . Q$$
$$r + r' = \Sigma . R$$
$$p\zeta + p'\zeta' = \Sigma . Pz - \Sigma . Rx$$
$$q\zeta + q'\zeta' = \Sigma . Qz - \Sigma . Ry$$

Difatti supponghiamo che per mantener l'equilibrio, sciogliendo i punti M, N, e rendendo così libero il sistema, si dovessero applicare in senso contrario alle coordinate le forze p, q, r nel punto M, e le forze p', q', r' nel punto N. Cercando i valori di queste forze per le generali equazioni dell'equilibrio (100) incontriamo appunto le equazioni qui sopra scritte.

107. *Coroll. I.* La terza equazione fa conoscere che tutto l'asse è sospinto nel senso delle z con forza $= \Sigma . R$. Per le altre quattro poi agevolmente si determinano le

pressioni che soffre ciascheduno degli appoggi nel senso delle x e delle y.

108. *Coroll. II.* Di qui può sciogliersi agevolmente il problema (*a*) pel quale si cercano gli sforzi che esercita il peso d' una porta sui due cardini che la reggono; o più generalmente le pressioni esercitate su' due cardini M, N dell' asse da una forza parallela all' asse medesimo.

Sia la forza $= -R$; la distanza della sua direzione dall' asse $= x$; l' intervallo fra i due cardini $MN = \zeta' - \zeta$. Si troverà

$$r + r' = -R; \; p' = -p = \frac{Rx}{\zeta' - \zeta}; \; q' = q = 0.$$

Così la porta grava di tutto il suo peso R la linea verticale de' cardini; ed oltre a ciò il cardine superiore è tratto in fuori, e l' inferiore è sospinto in dentro, entrambi con forza $= \frac{Rx}{\zeta' - \zeta}$.

(a) *V. Greg. Fontana Società Ital. Tom. VIII. Part. I. pag.* 135.

CAP. XVII.

Equilibrio d' un sistema rigido animato da forze parallele.

109. È proprietà d' un sistema rigido animato da forze parallele (44) il ridursi tutte le forze ad una risultante sola eguale alla somma di tutte, ed applicata al loro centro. Tale è un corpo grave; tale una massa le cui particelle tendano a moversi tutte con eguale velocità, e per linee parallele. In questi sistemi la determinazione delle condizioni e delle proprietà dell' equilibrio è per lo più assai facile, siccome vedremo scorrendo per alcuni casi.

110. *Proposizione I.* Una massa M di cui tutti gli elementi abbiano impressa la velocità V sia contigua ad una massa m animata in tutti i suoi elementi della velocità u. Le direzioni delle velocità V, u siano parallele alla retta che congiunge i centri di gravità delle due masse, e siano fra loro opposte. Vi sarà equilibrio, se le masse M, m siano reciprocamente proporzionali alle velocità V, u; e viceversa.

Infatti tutte le forze che agiscono sulla massa M si riducono ad una sola applicata al suo centro di gravità ed uguale alla som-

ma di tutte, e perciò eguale ad MV; e così quelle che agiscono sulla massa m si riducono ad una sola applicata al suo centro di gravità, ed $= mu$. Queste due forze essendo opposte, vi sarà equilibrio se sia $MV = mu$, ovvero $M : m :: u : V$; e viceversa.

Il prodotto della massa per la velocità comune colla quale tutti i suoi elementi si movono, o tendono a moversi, dicesi *quantità di moto*. Misurando questo prodotto la risultante di tutte le forze parallele che animano gli elementi della massa, misura ancora la forza della massa medesima.

111. *Proposizione II.* Un grave sospeso o sostenuto comunque da un punto fisso rimarrà in equilibrio, se la verticale condotta pel centro di gravità passa per quel punto; e viceversa.

112. *Proposizione III.* Un grave posato su d' un piano sarà in equilibrio se il piano è orizzontale, e se di più la verticale calata dal centro di gravità cade entro la base circoscritta dalle rette che congiungono i punti d' appoggio; e viceversa.

113. *Corollario I.* Mancando la prima condizione, il corpo striscierà radendo il piano: mancando la seconda, roterà attorno quello fra gli appoggi, verso cui cade la perpendicolare calata dal centro di gravità.

114. *Coroll. II.* Il grave preme il piano con tutto il suo peso: se gli appoggi sono due, o anche tre, purchè non giacciano in linea retta, si determina facilmente (38. 40) qual parte del peso gravi ciascheduno degli appoggi; ma negli altri casi (42) il problema è indeterminato.

115. *Proposizione IV.* Reggasi un grave su due piani inclinati CA, CB (Fig. 14) posando sugli appoggi A, B. Vi sarà equilibrio se la verticale GV condotta pel centro di gravità del corpo giace fra i due punti A, B e passa pel concorso P delle perpendicolari AP, BP erette sui piani inclinati ne' punti A, B; e viceversa.

Poichè allora il peso del grave potrà intendersi applicato al punto P della verticale GV, e risolversi in due forze secondo PA, PB, le quali agendo perpendicolarmente contro i piani ne' punti d' appoggio, rimarranno sostenute (92).

E viceversa se v' ha equilibrio, è forza che le perpendicolari AP, BP concorrano in un punto della GV. Poichè se intendiamo rimossi i piani, ed in loro vece sostituite in A, B delle forze eguali e contrarie alle pressioni che il grave esercitava sui piani stessi, deve sussister l' equilibrio fra il peso del corpo che agisce per la verticale GV, e queste due forze che agiscono secondo le

rette AP, BP. Ora tre forze che non siano parallele non ponno essere in equilibrio, se le loro direzioni non concorrono in un punto; dovendo ciascuna delle forze riuscire eguale ed opposta alla diagonale del parallelogrammo formato colle altre due.

116. *Coroll. I.* Le pressioni esercitate su ciascuno degli appoggi A, B si determinano facilmente. Sia P il peso del corpo, A, B le pressioni cercate. Sarà (17)

$P : A : B ::$ Sin. APB : Sin. BPG : Sin. APG

o sia, condotta la verticale CZ

$P : A : B ::$ Sin. ACB : Cos. BCZ : Cos. ACZ

117. *Coroll. II.* Se la verticale GV non passa per l intersezione P delle perpendicolari AP, BP ma più verso l'un degli appoggi, per esempio verso A, il corpo sdrucciolerà fra i due piani, scendendo il punto A, ed alzandosi il punto B.

118. *Coroll. III.* Se il corpo posa sui piani non già in un punto solo, ma in più punti, o in una base estesa, per esempio, sulle basi ab, $\alpha\beta$, basterà per l'equilibrio che la verticale GV passi pel parallelogrammo $lmno$ compreso dalle perpendicolari erette su i due piani nei termini delle basi ab, $\alpha\beta$.

119. *Coroll. IV.* Che se l'uno degli appoggi fosse fermato in modo che non permettesse al corpo di scorrere lungo il piano,

allora basterà per l'equilibrio che la verticale $G V$ passi tra i due punti A, B.

Anche in questo caso la determinazione delle pressioni è facilissima: di che daremo un esempio recando la soluzione genuina del seguente Problema, che da diversi è stato sciolto diversamente (a).

120. *Coroll. V.* La trave $A B$ (Fig. 15) s' appoggia coll' estremo A sul piano verticale $A C$ e coll'altro B sul piano orizzontale $B C$, fermata in B da un ostacolo che le impedisce di strisciar lungo il piano. Si cercano le pressioni o spinte esercitate sugli appoggi A, B..

Pel centro di gravità G della trave ergasi la verticale $G P$ che incontri in P l'orizzontale $A P$, e congiungasi $P B$. Il peso della trave suppongasi applicato in P, e si risolva nelle due forze $A a$, $B b$. Saranno queste le pressioni cercate.

Volendosi conoscere partitamente le spinte orizzontali e verticali esercitate dalla trave, di nuovo si decomponga la $B b$ nelle due $B X$, $B Z$, la prima orizzontale, l'altra verticale. Intendendo ora rimossi gli appoggi, e poste in vece loro le forze $A a$, $B X$, $B Z$ volte in senso contrario, queste forze dovranno equilibrare il peso della tra-

(a) *Società Italiana Tom. X. Part. I. pag. 138.*

ve, che chiamo P. Poichè il sistema è tutto in un piano, avremo dall' art. 100 tre sole equazioni

$$Aa = BX \quad ; \quad P = BZ$$
$$P \cdot CT + Aa \cdot CA = BZ \cdot CB$$

Quindi $$Aa = BX = \frac{P \cdot BT}{CA}$$

Adunque il fulcro B è premuto verticalmente da tutto il peso della trave; esso poi, ed il punto A sono spinti orizzontalmente in direzioni opposte, con forza espressa da $\frac{P \cdot BT}{AC}$.

Sia $AB = a$, $AC = b$, l'angolo $BAC = \Phi$. Sarà la spinta orizzontale $\frac{P(a-b)}{a}$ Tang. Φ.

E se il centro di gravità cade nel mezzo della trave, la spinta riesce $= \frac{1}{2} P$ Tang. Φ.

CAP. XVIII.

De' sistemi di forma variabile.

121. Quelle condizioni che assicurano l' equilibrio ne' sistemi rigidi non bastano ad assicurarlo ne' sistemi di forma variabile. In questi oltre il moto progressivo ed il rotatorio ponno aver luogo altri moti varj secondo la particolar forma e disposizione del

sistema; il che richiede altre condizioni d'equilibrio dirette ad impedire tutti que' moti parziali de' quali ciascun punto è suscettibile. Il principio Galileano delle velocità virtuali si applica anche a' sistemi di forma variabile, e somministra le equazioni del loro equilibrio; ma la dimostrazione generale di questo principio, e la sua applicazione spesso difficile ci trarrebber fuori de' limiti d'un istituzione elementare. E altronde per gli usi pratici basta la considerazione di alcuni particolari sistemi, pe' quali le leggi d'equilibrio si deducono agevolmente dalla decomposizione delle forze. Ci limiteremo pertanto ai poligoni gli angoli de' quali possono aprirsi o serrarsi per l'azione delle forze ad essi applicate: o siano i lati flessibili, o rigidi. Alla qual trattazione c'introdurrà la seguente Proposizione.

122. *Proposizione*. Concorrano nel nodo A (Fig. 16) due funi fisse coi loro capi ne' punti E, E', e tratte in A dalla forza P. Siano α, α' gli angoli che fa la direzione della forza P colle due funi, siccome è espresso nella figura, e siano E, E' le tensioni di esse funi. Avremo per l'equilibrio (17)

$$P : E : E' :: \text{sin.}\,(\alpha + \alpha') : \text{sin.}\,\alpha' : \text{sin.}\,\alpha .$$

123. *Coroll. I.* Le due funi giacciono necessariamente sullo stesso piano colla direzione della forza traente P.

124. *Coroll. II.* Se l'angolo delle due funi è molto ottuso, le loro tensioni sono grandissime in paragone della forza traente: nè può quell'angolo sparire, senza che si annulli la forza P. Quindi non v'ha tensione che basti a stendere una corda pesante in linea retta non verticale.

125. *Coroll. III.* Se la direzione della forza P taglia per metà l'angolo delle due funi, esse funi sono tese egualmente, ed è la tensione $= \frac{P}{2 \cos. \alpha}$.

126. *Coroll. IV.* Se il nodo A è scorrevole, non può aversi equilibrio, se appunto la direzione della forza P non tagli per metà l'angolo delle due funi.

Poichè traendo la forza il nodo A gli farebbe scorrere un ellisse avente i fochi in E, E'. Or non può aversi equilibrio se non quando la direzione della forza sia perpendicolare a questa ellisse (92) nel qual caso essa taglia per metà l'angolo delle rette condotte ai due fochi.

127. *Coroll. V.* Di qui potrà sciogliersi agevolmente o per sintesi, o per analisi il seguente Problema. In una corda di lunghezza data e sospesa da due punti dati è infilato un anello che porta un peso; si cerca il punto ove si fermerà il peso onde stia in equilibrio (*a*).

(*a*) *Bossut Mechan* §. 128.

CAP. XIX.

Del Poligono funicolare.

128. PROPOSIZIONE. Sia il poligono funicolare $EABCE'$ (Fig. 17) fisso ne' capi E, E' e tratto dalle forze P, Q, R, che facciano coi lati del poligono gli angoli espressi dalle lettere segnate nella figura. Siano E, E' le tensioni delle funi estreme, X, Y le tensioni delle funi intermedie. Sarà per l'equilibrio (17)

$P : E : X ::$ sin. $(\alpha + \alpha') :$ sin. $\alpha' :$ sin. α

$Q : X : Y ::$ sin. $(\beta + \beta') :$ sin. $\beta' :$ sin. β

$R : Y : E' ::$ sin. $(\gamma + \gamma') :$ sin. $\gamma' :$ sin. γ

Simile è il processo per qualunque maggior numero di lati.

129. *Coroll. I.* Di quì si ponno ricavare i valori delle tensioni di ciascuna fune, e si vede subito che le tensioni delle funi estreme stanno tra loro così

$E : E' ::$ sin. α' sin. β' sin. $\gamma' :$ sin. α sin. β sin. γ

130. *Coroll. II.* Poscia paragonando fra loro le diverse espressioni delle tensioni X, Y, che risultano dalle esposte analogie, si ottengono l'equazioni

$$\frac{P \text{ sin. } \alpha}{\text{sin. } (\alpha + \alpha')} = \frac{Q \text{ sin } \beta'}{\text{sin. } (\beta + \beta')};$$

$$\frac{Q \text{ sin. } \beta}{\text{sin. } (\beta + \beta')} = \frac{R \text{ sin. } \gamma}{\text{sin. } (\gamma + \gamma')}$$

le quali si ponno riunire così

$$\frac{P \text{ sin. } \alpha \text{ sin. } \beta}{\text{sin. } (\alpha + \alpha')} = \frac{Q \text{ sin. } \beta \text{ sin. } \beta'}{\text{sin. } (\beta + \beta')} = \frac{R \text{ sin. } \beta' \text{ sin. } \gamma'}{\text{sin. } (\gamma + \gamma')}$$

Queste equazioni insegnano il rapporto che deve esistere tra le potenze P, Q, R e le loro direzioni, acciocchè il poligono sia equilibrato.

131. *Coroll. III.* Se le direzioni delle potenze P, Q, R tagliano per metà gli angoli corrispondenti del poligono, tutto il poligono è teso ugualmente con forza espressa da una qualunque delle potenze traenti divisa pel doppio coseno dell'angolo che essa forma colla fune alla quale è applicata.

132. *Coroll. IV.* Quindi se una fune tirata nelle estremità da due forze abbraccia una carrucola o un cilindro, nello stato d'equilibrio le due forze debbon essere ugnali; la fune è per tutto tesa egualmente, ed egualmente preme su tutti i punti della carrucola.

133. *Coroll. V.* Se il poligono è chiuso, e regolare, le forze traenti sono eguali; ciascuna di esse sta alla tensione del poligono, come il lato del poligono al raggio del circolo circoscritto; e la somma di tutte sta alla tensione del poligono come il perimetro del poligono al suddetto raggio.

CAP. XX.

Del Poligono funicolare teso da forze parallele.

134. PROPOSIZIONE. Se le potenze P, Q, R sono parallele, vagliono ancora le analogie della Proposizione precedente, avvertendo di più essere in tal caso sin. $\alpha' =$ sin. β, e sin. $\beta' =$ sin. γ.

135. *Coroll. I.* In questo caso tutto il poligono e le direzioni delle potenze giacciono necessariamente nello stesso piano.

136. *Coroll. II.* Le equazioni dell' equilibrio divengono

$$\frac{P \sin.\alpha \sin.\alpha'}{\sin.(\alpha+\alpha')} = \frac{Q \sin.\beta \sin.\beta'}{\sin.(\beta+\beta')} = \frac{R \sin.\gamma \sin.\gamma'}{\sin.(\gamma+\gamma')}$$

ovvero

$$\frac{P}{\cot.\alpha+\cot.\alpha'} = \frac{Q}{\cot.\beta+\cot.\beta'} = \frac{R}{\cot.\gamma+\cot.\gamma'}$$

Adunque ciascheduna delle potenze o pesi P, Q, R è proporzionale alla somma delle cotangenti degli angoli ne' quali divide l'angolo del poligono. (*a*).

137. *Coroll. III.* Di quì avanti supporrò che le forze parallele sieno verticali. Risolvo la tensione E della prima fune in due

(a) *V. Fuss Nova Acta Petrop. Tom. II.*

forze, l'una A orizzontale, l'altra V verticale. E similmente risolvo la tensione E' in due, A' orizzontale, V' verticale. E sarà

$$A = E \text{ sin. } \alpha \quad ; \quad A' = E' \text{ sin. } \gamma'$$
$$V = E \text{ cos. } \alpha \quad ; \quad V' = E' \text{ cos. } \gamma'$$

138. *Coroll. IV.* Ponendo ora i valori di E, E' che si traggono dalle analogie (128) troveremo rispetto agli sforzi orizzontali

$$A = A' = \frac{P}{\text{cot. } \alpha + \text{cot. } \alpha'} = \frac{Q}{\text{cot. } \beta + \text{cot. } \beta'} = \frac{R}{\text{cot. } \gamma + \text{cot. } \gamma'}$$

Quindi lo sforzo orizzontale A è costante per tutto il poligono, ed uguale al rapporto di ciascheduno de' pesi come P alla somma delle cotangenti de' rispettivi angoli α, α'.

139. *Coroll. V.* Quanto poi agli sforzi verticali avremo

$$V = A \text{ cot. } \alpha \quad ; \quad V' = A \text{ cot. } \gamma'$$

onde segue che la loro somma eguaglia la somma de' pesi P, Q, R. Poichè abbiamo (138)

$$P = A \text{ (cot. } \alpha + \text{cot. } \alpha' \text{)}$$
$$Q = A \text{ (cot. } \beta + \text{cot. } \beta' \text{)}$$
$$R = A \text{ (cot. } \gamma + \text{cot. } \gamma' \text{)}$$

Sommando queste equazioni, ed avvertendo essere cot. $\alpha' = -$ cot. β, e cot. $\beta' = -$ cot. γ viene

$$P + Q + R = A \text{ cot. } \alpha + A \text{ cot. } \gamma' = V + V'.$$

140. *Coroll. VI.* Le tensioni di ciascheduna fune si hanno dalle analogie (128) e ponendovi il valore di A si ottengono l' espressioni seguenti

$$E=\frac{A}{\text{sin.}\alpha};\ X=\frac{A}{\text{sin.}\beta};\ Y=\frac{A}{\text{sin.}\gamma};\ E'=\frac{A}{\text{sin.}\gamma'}$$

Ogni fune è dunque tesa in ragione inversa del seno di sua obbliquità alla verticale.

141. *Coroll. VII.* Una rimarcabile proprietà di questo poligono è che le direzioni de' lati estremi EA, EC prolungate concorrono in qualche punto della verticale calata dal centro comune di gravità de' pesi P, Q, R.

Ciò potrebbe dimostrarsi col calcolo, ma più speditamente si dimostra, riflettendo che questo sistema si riduce a tre forze. L' una è la risultante o la somma de' pesi P, Q, R e questa agisce per la verticale condotta pel centro di gravità. Le altre due sono le tensioni E, E' delle funi che metton capo ai punti fissi, ed agiscono per le direzioni AE, CE'. Ora per l' equilibrio di queste forze è d'uopo che le loro direzioni concorrano in un punto.

142. *Coroll. VIII.* Sia la distanza orizzontale dei due punti fissi $EM=m$, e la loro distanza verticale $ME'=n$. E siano i lati del poligono $EA=a$, $AB=b$, $BC=c$, $CE'=d$. Sarà per la Trigonometria

$m = a \sin. \alpha + b \sin. \beta + c \sin \gamma + d \sin. \gamma'$

$n = a \cos. \alpha + b \cos. \beta + c \cos. \gamma - d \cos. \gamma'$

Unendo a queste due equazioni le tre

$$P = A\ (\cot. \alpha + \cot. \alpha')$$
$$Q = A\ (\cot. \beta + \cot. \beta')$$
$$R = A\ (\cot. \gamma + \cot. \gamma')$$

abbiamo cinque equazioni, onde delle tredici quantità a, b, c, d; $\alpha, \beta, \gamma, \gamma'$; m, n; P, Q, R se otto sian date, potranno le altre cinque determinarsi in modo che riesca il poligono equilibrato, e conoscersi ancora il valore della spinta orizzontale.

CAP. XXI.

Della Catenaria.

143. PROPOSIZIONE I. Penda da due chiodi E, E' (Fig. 18) un filo o catenella pesante, e compongasi alla curvatura EAE'. Riferita questa curva all'asse verticale AB elevato sul punto infimo della curva, ove la tangente è orizzontale, sia P il peso dell'arco AM, ed A una costante. Sarà l'equazione della curva

$$P\,dy = A\,dx.$$

Potendo la curva riguardarsi come un poligono funicolare infinitilatero, ed essendo

dP il peso applicato al punto M, sarà (138)

$$dP = A\,(\text{cot. } m\,M\,r + \text{cot. } \mu\,M\,r)$$

Ma $$\text{cot. } m\,M\,r = \frac{M\,r}{m\,r} = \frac{dx}{dy}$$

e $$\text{cot. } \mu\,M\,r = -\text{ tang. } \mu\,M\,\rho = -\frac{\mu\,\rho}{M\,\rho}$$

$$= -\left(\frac{dx}{dy} - d.\frac{dx}{dy}\right)$$

Dunque $dP = A\,d.\frac{dx}{dy}$; e $P\,dy = A\,dx$.

Nè accade aggiunger costante, poichè quando $P = 0$ viene naturalmente $\frac{dx}{dy} = 0$.

Egli è chiaro che la costante A rappresenta la tensione o spinta orizzontale, che per tutta la curva è la stessa.

144. *Coroll. I.* Di quì le proprietà generali della catenaria. 1. Essa giace tutta in un piano verticale. 2. Il peso dell'arco AM è proporzionale alla cotangente dell'angolo che fa la curva in M colla verticale; e perciò la catenaria non può avere la tangente verticale. 3. Il centro di gravità d'un arco qualunque trovasi nella verticale che passa per l'intersezione delle tangenti ai punti estremi dell'arco.

145. *Coroll. II.* Se il punto infimo A fosse carico d'un peso particolare V, in luogo

di P dovrebbesi porre $P+V$; e l'equazione diverrebbe

$$P\,dy+V\,dy=A\,dx$$

146. *Coroll. III.* Se il peso della catena è uniforme, sarà P proporzionale all'arco s; ond'è l'equazione della catenaria omogenea $s\,dy=A\,dx$

147. *Coroll. IV.* Essendo $ds=dy\sqrt{\left(\frac{dx^2}{dy^2}+1\right)}$ se ponghiamo per $\frac{dx}{dy}$ il suo valore $\frac{s}{A}$ avremo fra y ed s l'equazione

$$dy=\frac{A\,ds}{\sqrt{(A^2+s^2)}}$$

che integrata porge

$$y=\pm A\log.\left(\frac{s+\sqrt{(A^2+s^2)}}{A}\right)$$

Indi fra x ed s l'equazione

$$dx=\frac{s\,ds.}{\sqrt{(A^2+s^2)}}$$

che integrata dà

$A+x=\sqrt{(A^2+s^2)}$; ovvero $s=\sqrt{(2Ax+x^2)}$

Quindi l'equazione fra x ed y

$$y=\pm A\log.\left(\frac{A+x+\sqrt{(2Ax+x^2)}}{A}\right)$$

148. *Coroll. V.* È dunque la catenaria omogenea rettificabile, essendo l'arco medio proporzionale fra x, e $2A+x$.

L' angolo di ciaschedun elemento colla verticale ha per seno $\frac{dy}{ds}$, o sia $\frac{A}{A+x}$; e però la tensione di ciaschedun elemento è (140) proporzionale ad $A+x$.

149. *Coroll. VI.* Volendosi costruire la catenaria e determinare tutte le quantità che vi hanno rapporto, fa d' uopo sia nota la posizione de' due termini E, E' e la lunghezza della catena EAE'. Siano dunque $EQ=a$, $QE'=b$, $EAE'=l$ quantità note; ed $EB=m$, $AB=n$, $EMA=k$ quantità da determinarsi. Nelle equazioni

$$s=\sqrt{(2Ax+x^2)}$$

$$y=\pm A\log.\left(\frac{A+x+\sqrt{(2Ax+x^2)}}{A}\right)$$

conviene che posto $x=n$, riesca $y=m$, $s=k$; e posto $x=n-b$, riesca $y=a-m$, $s=l-k$. Quindi quattro equazioni per le quali determineremo le quantità m, n, k, A.

Fissata così la posizione dell' asse AB, e determinato il coefficiente A, tutti i punti della catenaria si trovano speditamente per mezzo dell' equazione fra x ed y.

150. *Coroll. VII.* Facilissima è poi la descrizione meccanica della catenaria omogenea seguando l' orma d' una catenella uniforme sospesa da due punti in un piano verticale. Il suo andamento molto s' accosta a

quello della parabola, massimamente quando la saetta sia piccola.

A torto si va ripetendo avere il Galileo confusa la catenaria colla parabola; egli ha solamente avvertita (*a*) la somiglianza che passa fra queste due curve.

151. *Coroll. VIII.* Ma anche senza veruna costruzione si può determinare a un dipresso l'altezza del ventre o sacca che farà nel mezzo una corda attaccata a due punti egualmente alti sopra l'orizzonte, e tesa da un peso molto grave in paragone del peso della corda. Poichè l'equazione $A+x=\sqrt{(A^2+s^2)}$ svolta in serie dà

$$x=\frac{1}{2}s\left\{\frac{s}{A}-\frac{s^3}{4A^3}+\frac{s^5}{8A^5}-\text{etc.}\right\}$$

Ora sia L la lunghezza della fune, p il suo peso, e P il peso dal quale è tesa: sarà prossimamente $s=\frac{1}{2}L$, ed $\frac{s}{A}=\frac{p}{2P}$; onde sarà la saetta

$$x=\frac{1}{4}L\left\{\frac{p}{2P}-\frac{p^3}{32P^3}+\frac{p^5}{256P^5}-\text{etc.}\right\}$$

Essendo per ipotesi $\frac{p}{P}$ una frazione assai piccola, la serie sarà convergentissima, ed è prossimamente $x=\frac{pL}{8P}$.

(a) *Galileo Opere. Padova* 1744. *Tom. III. p.* 169.

152. *Proposizione II.* Penda dalla circonferenza d' un cerchio orizzontale $E\,O\,E'$ (Fig. 19) un velo carico di pesi uniformemente distribuiti in ogni sua sezione orizzontale. L' equazione della curva $E\,M\,A$ che colla sua rivoluzione attorno l'asse verticale $A\,B$ genera la superficie del velo, se chiamisi $d\,P$ il peso che grava il punto M, ed A una costante, sarà

$$d\,y \int y\,d\,P = A\,d\,x.$$

Intendasi la sezione $e\,m\,e'$ prossima alla $E\,M\,E'$. L' unghia tenuissima $E\,A\,e'$ potrà considerarsi come una catenaria fissa ne' termini $E\,e$, $E'\,e'$. Essendo l' archetto $M\,m$ proporzionale ad y, sarà $y\,d\,P$ il peso di quell' archetto. Sarà pertanto (143)

$$y\,d\,P = A\,d\,.\,\frac{d\,x}{d\,y}, \text{ onde } d\,y \int y\,d\,P = A\,d\,x.$$

153. *Coroll. I.* Se il punto più basso A fosse carico d' un peso particolare V, sarebbe l' equazione

$$d\,y \int y\,d\,P + V\,d\,y = A\,d\,x.$$

154. *Coroll. II.* Se il peso è uniformemente distribuito per tutta la superficie del velo, è $d\,P$ proporzionale a $d\,s$, e divien l' equazione

$$d\,y \int y\,d\,s = A\,d\,x.$$

E qui essendo come sopra

$$d\,s = d\,y \sqrt{\left(\frac{d\,x^2}{d\,y^2} + 1\right)}$$

risulta l'equazione della curva tra x ed y come segue

$$y\,dy = \frac{A\,d.\frac{dx}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dx^2}{dy^2}+1\right)}}$$

che integrata divieno

$$\frac{1}{2}\,y^2 = A\log.\left\{\frac{dx}{dy}+\sqrt{\left(\frac{dx^2}{dy^2}+1\right)}\right\}$$

Nè occorre aggiunger costante, poichè y e $\frac{dx}{dy}$ spariscono insieme.

CAP. XXII.

De' poligoni di lati inflessibili, e delle curve d' equilibrio degli Archi, e delle Cupole.

155. Se i lati del poligono equilibrato non sono flessibili, ma più tosto spranghe rigide appoggiate l' una all' altra co' loro termini senza esser punto connesse, e gravate negli angoli di qualche peso, ovvero spinte da forze di qualsivoglia direzione, varranno tuttavia per tali sistemi quelle leggi e condizioni d' equilibrio, che vagliono pe' sistemi funicolari. Solamente è da avvertire che le potenze applicate agli angoli

non rientranti del poligono flessibile debbono trarre dall' indentro all' infuori del poligono; ma nel poligono di lati rigidi debbono al contrario spingere verso l' indentro. Di qui nascono pei poligoni rigidi gravati di pesi le seguenti leggi d' equilibrio.

156. *Proposizione*. Nel poligono di lati rigidi gravato negli angoli de' pesi P, Q, R etc. l' equilibrio è determinato dalle equazioni

$$A = \frac{P}{\cot.\alpha + \cot.\alpha'} = \frac{Q}{\cot.\beta + \cot.\beta'}$$

$$= \frac{R}{\cot.\gamma + \cot.\gamma'} = \text{etc.}$$

157. *Coroll. I.* Qui la costante A rappresenta la spinta orizzontale che il poligono equilibrato esercita sugli appoggi, ed in qualunque punto del suo perimetro. Da essa poi si deducono agevolmente le pressioni o spinte verticali, e quelle che soffre ciascun lato del poligono nel senso della sua lunghezza (139. 140).

158. *Coroll. II.* Se il poligono oltre di esser carico negli angoli, lo fosse ancora in uno o più punti de' lati, i pesi che gravano ciascun lato si dovranno risolvere in due (38) applicati alle estremità di quel lato, o sia agli angoli contigui del poligono. Per tal modo tutti i pesi che gravano il poligono si ponno sempre supporre applicati agli angoli.

159. *Coroll. III.* La curva d' equilibrio d'un Arco, o d'una Volta composta di minimi elementi o latercoli semplicemente appoggiati l' uno all'altro è una catenaria, e chiamando P il peso dell'arco ha per equazione (143). $P\,dy = A\,dx$

160. *Coroll. IV.* La superficie d' equilibrio d'una Cupola composta di zone minime circolari nasce dalla rotazione d' una curva, che chiamando $y\,dP$ il peso della zona elementare, ha per equazione (152)

$$dy \int y\,dP = A\,dx$$

161. *Scolio.* Per altro la superficie nata da questa curva non è già l' unica figura d' equilibrio per le cupole, come lo è la catenaria per gli archi (a). Infatti rappresenti la Fig. 20 quella superficie equilibrata, ed in un punto qualunque M sarà $\frac{dx}{dy} = \frac{\int y\,dP}{A}$. Ora se noi cangiamo la curvatura in M, portando in fuori l'elemento Mn dell'unghia, talchè il latercolo Mn diventi più obbliquo di prima alla verticale, crescerà l' elemento dy, e sarà allora $\frac{dx}{dy} < \frac{\int y\,dP}{A}$. Nè per ciò si toglierà l'e-

(a) *Bouguer Memoires de l' Acad. des Scienc. de Paris* 1734.

quilibrio. Poichè egli è vero che allora l'unghia superiore MAm spingendo obbliquamente l'elemento Mn tende a farlo sdrucciolare entro il vano della Cupola; ma insieme tutti gli altri elementi della stessa zona circolare tendono con egnale sforzo ad entrare, e questi sforzi si sostengono e si elidono scambievolmente.

Non così avverrebbe se l'elemento Mn si piegasse in dentro, onde fosse $\frac{dx}{dy} > \frac{\int y\,dP}{A}$. Poichè allora la spinta obbliqua dell'unghia sovrapposta all'elemento Mn tenderebbe a farlo schizzar fuori della Cupola, al quale sforzo nulla si oppone.

162. *Coroll. V.* Basta dunque per l'equilibrio della Cupola, che $\frac{dx}{dy}$ non sia maggiore di $\frac{\int y\,dP}{A}$. E l'equazion generale delle curve che colla loro rivoluzione producono una Cupola equilibrata è

$$dx \int y\,dP > A\,dx.$$

La curva dell'equazione $dy \int y\,dP = A\,dx$ è l'ultima nella serie di queste curve, ed è fra tutte la più concava verso l'asse. La Cupola che da lei nasce ha questa particolarità, che l'unghia qualunque EAe isola-

ta, ed appoggiata soltanto all'unghia eguale ed opposta $E' A e'$ si regge per se medesima, nè fa forza contro le unghie vicine; il che nelle altre Cupole non avviene.

163. *Coroll. VI.* Le Cupole coniche, o sia Guglie sono per la stessa loro forma equilibrate e sicure: molto più le Cupole che voltano all'asse la loro convessità.

164. *Coroll. VII.* Dalle cose avvertite all'art. 161. si trae ancora un'altra conseguenza degna di rimarco. In una Cupola equilibrata si segni una sezione orizzontale qualunque, per esempio $M M'$. Si potrà accrescere quanto si vuole il peso della zona inferiore $E M M' E'$ (ben inteso che il carico si distribuisca uniformemente tutto all'intorno dell'asse) senza che l'equilibrio si tolga. E pel contrario si può alleggerire a piacimento la calotta superiore $M A M'$, ed anche levarla via tutta, salvo l'equilibrio. Non così avviene negli Archi.

Le cose sin quì dette riguardano la figura degli Archi e Cupole, non tenendo conto della loro grossezza, ovvero supponendola infinitesima. Altre considerazioni hanno luogo quando vogliasi aver ragione della grossezza; ed or passeremo a dichiararle.

CAP. XXIII.

Degli Archi di grossezza finita.

Prima condizione dell' equilibrio.

165. Sia l'Arco *E' a E* (Fig. 21) simmetrico attorno l'asse verticale *A B*, formato d'infiniti cunei pesanti *M m n N* contigui, ma non connessi fra loro, ed appoggiato ai pulvinari immobili *E e*, *L' c'*. Preso dal vertice l'arco qualunque *A a m M* insistente sul letto inclinato *M m*, è manifesto che quest'arco è tratto in giù dal proprio peso, ed insieme è spinto orizzontalmente dalla pressione che l'arco opposto *L' c' a A* esercita sopra di *A a*. Adunque per l'equilibrio è necessario (*a*) che la risultante di queste due forze sia perpendicolare alla base *M m*, e non cada fuori della medesima. Mancando la prima condizione, l'arco si sposterebbe strisciando lungo il letto *M m*; mancando la seconda, roterebbe attorno quello de' termini *M* ovvero *m* verso cui la detta risultante cadesse. Veggiamo ora partitamente qual figura debba aver l'Arco per adempiere entrambe le condizioni.

(a) *Coulomb Memoires présentées à l' Acad. R. Tom. VII.*

166. *Proposizione*. Per l' equilibrio dell' Arco $E'aE$ si richiede in primo luogo che preso dal vertice un arco parziale qualunque $AamM$ insistente sul letto Mm, il peso di quest' arco sia proporzionale alla tangente dell' angolo che fa il letto Mm colla verticale.

Sia P il peso dell' arco $AamM$; A la spinta orizzontale sopra di Aa; e l' obbliquità del letto Mm alla verticale. Concorrano nel punto G le due forze P, A espresse colle rette GV verticale, GO orizzontale. Dovendo la risultante GS esser normale al letto Mm, il triangolo delle forze GSO riuscirà simile al triangolo MmR fatto sull' ipotenusa Mm. Quindi $GV:GO::MR:mR$ o sia $P:A::$ sin. e: cos. e. Dunque $P=A$ tang. e.

167. *Coroll. I.* Non può un Arco sostenersi per se medesimo, quando sia impostato sopra pulvinari orizzontali.

168. *Coroll. II.* Si riporti la curva interna AME all' asse verticale AB colle coordinate $AP=x$, $PM=y$, e dicasi z la grossezza Mm del cuneo cui risponde l' ascissa x. Calcolando per mezzo della Trigonometria l' area del quadrilatero $MmnN$, trovasi quest' area $\frac{1}{2}z^2\,de+z\,(dx$ sin. $e+dy$ cos. $e)$ Ora quest' area esprime ancora il peso dP del cuneo. Ma l' equazione $P=A$ tang. e

dà $dP = \frac{A\,de}{\cos e^2}$. Abbiamo perciò l'equazione

$$\frac{1}{2} z^2\,de + z(dx \sin. e + dy \cos. e) = \frac{A\,de}{\cos. e^2}$$

per mezzo della quale data la curva interna, e la legge con cui procedono le obbliquità e de' cunei, potremo trovare la grossezza z competente a ciascun punto dell'Arco: o viceversa data la grossezza, trovare le direzioni de' tagli da darsi ai cunei, affinchè riesca l'Arco equilibrato. Gioverà recar qualche esempio dell' uno e dell' altro problema.

169. *Coroll. III.* Sia data la curva interna, e siano i tagli de' cunei ad essa perpendicolari, il qual caso è nella pratica frequentissimo; e si cerchi la grossezza z dell' Arco.

Sarà allora $e = 90^\circ + r\,MN$, onde

$$\text{tang. } e = \frac{dx}{dy};\ \sin. e = \frac{dx}{ds};\ \cos. e = \frac{dy}{ds}$$

Quindi l' equazione $P = A$ tang. e diviene $P\,dy = A\,dx$, equazione della catenaria; e l' equazione fra z ed e diventa

$$\frac{1}{2} z^2\,de + z\,ds = \frac{A\,de}{\cos. e^2}.$$

Dicasi R il raggio osculatore della curva AME nel punto M; sarà $\frac{ds}{de} = R$, onde

l'equazion precedente divisa per de divieno

$$z^2 + 2Rz = \frac{2A}{\cos. e^2}$$

e quindi $z = -R + \sqrt{\left(RR + \frac{2A}{\cos. e^2}\right)}$.

La costante A si determina facilmente quando si conosca la grossezza della Volta in un punto dato, per esempio nel punto sublime A.

170. *Coroll. IV.* Per esempio sia AME un arco di cerchio, $Aa = m$, e vogliasi determinare la grossezza della Volta a distanza di 45 gradi dal vertice.

Sarà R costante, uguale al raggio dell'arco AME, ed essendo $z = m$ quando $e = 0$, avremo $m^2 + 2Rm = 2A$; e

$$z = -R + \sqrt{\left(RR + \frac{2Rm + m^2}{\cos. e^2}\right)}.$$

Ora posto $e = 45^\circ$, sarà $\cos. e^2 = \frac{1}{2}$, onde

$$z = -R + \sqrt{(R^2 + 4Rm + 2m^2)}.$$

Questo valore, quando R eccede notabilmente la grossezza m, pochissimo differisce da $2m$. Quindi ai gradi 45 dovrà la Volta esser grossa poco meno del doppio di sua grossezza alla chiave.

171 *Coroll. V.* Venendo al secondo problema, sia una piattabanda orizzontale (Fig. 22) compresa dalle parallele AE, ae distanti

fra loro dell'intervallo $Aa = m$. Sarà nell' equazione dell'art. 168, $dx = o$, $z = \frac{m}{\cos. e}$, ond' essa diviene $2m\,dy = (2A - m^2)\,\frac{de}{\cos. e^2}$, onde tang. $e = \frac{2my}{2A - m^2}$.

Di qui si vede che i tagli de' cunei debbono convergere tutti ad uno stesso centro. Poichè se prolunghiamo il taglio qualunque Mm ad incontrare l'asse verticale in C, sarà

$$AC = \frac{y}{\text{tang. } e} = \frac{2A - m^2}{2m}$$

che è valor costante.

La costante A si determina, quando sia nota la lunghezza AE della piattabanda, e l'inclinazione de' pulvinari Ee. Poichè allora per un dato valore di y conosceremo il valore di tang. e.

CAP. XXIV.

Seconda condizione dell'equilibrio.

172. PROPOSIZIONE. Per l'equilibrio dell' Arco $E'aE$ (Fig. 23) si richiede in secondo luogo, che preso dal vertice un arco parziale qualunque $Aamm M$, la verticale condotta pel centro di gravità di quest' arco

passi a traverso il parallelogrammo *f g h i* compreso dalle normali ai termini de' letti *A a*, *M m*.

Altrimenti egli è chiaro che la risultante delle due forze *P*, *A* cadrebbe fuori della base *M m*, sulla quale l' arco s' appoggia.

173. *Coroll. I.* Nell' esempio dell' art. 169 nel quale si pone che la curva interna sia normale ai tagli de' cunei, agevolmente ci assicureremo che mentre sia adempiuta la prima condizione dell' equilibrio, resta adempiuta ancora quest' ultima. Poichè la curva interna essendo allora una catenaria (169) se il peso di ciaschedun cuneo *M m n N* fosse tutto raccolto nel latercolo corrispondente *M N*, la verticale condotta pel centro di gravità dell' arco *A a m M* passerebbe pel punto *f* (144) intersezione delle tangenti estreme *A f*, *M f*. Ora per *m* si conduca la curva *m C* perpendicolare ai tagli prolungati de' cunei, e questa incontri in *C* il taglio del vertice *A a*. Sarà essa pure una catenaria; e se il peso d' ogni cuneo fosse raccolto nel corrispondente latercolo di questa curva *m C*, la verticale condotta pel centro di gravità dell' arco *A a m M* passerebbe pel punto *p*, intersezione delle tangenti estreme *C p*, *m p*.

Essendo in realtà il peso dell' arco distribuito tra le curve *A M*, *C m*, la verticale

pel suo centro di gravità cadrà fra i punti f, p. E qui facilmente si scorge che essendo $AC = Mm$, il parallelogrammo $fgpq$ sarà un rombo avente gli angoli ottusi in f, p; e perciò cadendo quella verticale fra i punti f, p non potrà non attraversare il parallelogrammo $fghi$, siccome richiede la seconda condizione dell'equilibrio.

174. *Coroll. II.* Nell'esempio dell'art. 171 (Fig. 22) se dal punto E si alzi EX perpendicolare ad Ee, sarà necessario per l'equilibrio che la verticale eretta pel centro di gravità G della mezza piattabanda $AaeE$ passi pel triangolo EXe. Adunque la distanza del centro G dalla verticale Aa non dovrà esser minore della aX. Ed allora è palese che la seconda condizione dell'equilibrio s'adempie non solo nell'intero solido $AaeE$, ma in qualunque sua porzione.

175. *Coroll. III.* Quindi considerando la larghezza AE della piattabanda, la sua grossezza Aa, e l'inclinazione del pulvinare Ee, scorgesi che presi ad arbitrio due di questi elementi, havvi un limite che il terzo non dovrà oltrepassare, se vuolsi che la piattabanda si regga. Ecco l'equazione che determina questo limite.

Sia $Ca = R$, $CA = r$; ang. $ACE = \lambda$. La distanza del centro di gravità del trapezio $AaeE$ dalla verticale Aa si troverà

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$. tang. λ. Sarà in oltre la retta $aX = r$ tang. $\lambda - \frac{R-r}{\text{tang. } \lambda}$. Di qui (174) l' equazione

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \text{ tang. } \lambda = r \text{ tang. } \lambda - \frac{R-r}{\text{tang. } \lambda}.$$

Chiamisi $A\,a = m = R - r$; ed $A\,E = a = r$ tang. λ. Introducendo queste denominazioni nell'equazion precedente si avrà l'equazione m^3 tang. $\lambda^3 + 3\,(m^2 - a^2)$ tang. $\lambda + 6\,a\,m = 0$ per la quale noti due fra gli elementi a, m, λ conosceremo il terzo.

CAP. XXV.

Delle Cupole di grossezza finita.

176. Rappresenti la Fig. 24 l' unghia solida d' una Cupola simmetrica nata dalla rotazione della curva $A\,M\,E$, e sia $E\,e'$ la porzion corrispondente del pulvinare immobile al quale s' appoggia la Cupola. Chi volesse che l' unghia isolata, e sostenuta soltanto dalla sua eguale ed opposta fosse in equilibrio, dovrebbero aver luogo delle condizioni analoghe a quelle che determinano l' equilibrio degli Archi. Presa dal vertice la porzion qualunque $M\,a\,\mu'$, la risultante

del suo peso, e dello sforzo orizzontale esercitato in $A\,a$ dall'unghia opposta dovrebbe esser perpendicolare sul letto $M\,\mu'$, e passare per qualche punto del medesimo. Ma ricercandosi l'equilibrio non già nell'unghia solitaria, ma bensì nell'intera Cupola, potrà (161) quella risultante declinare dal perpendicolo cadente sul letto $M\,\mu'$, purchè ne declini piegando verso l'asse, o sia verso l'interno della Cupola, e non mai verso la parte opposta. Altrimenti l'unghia $M\,a\,\mu'$ tenderebbe a schizzar fuori strisciando lungo il piano $M\,\mu'$, e crollerebbe la Cupola. Di qui nasce la seguente condizione.

177. *Proposizione*. Per l'equilibrio della Cupola si richiede che prese dal vertice le porzioni d'unghia $M\,a\,\mu'$, $M\,a\,\nu'$ etc. i pesi di queste crescano in ragion maggiore che non fanno le tangenti delle obbliquità de' piani $M\,\mu'$, $N\,\nu'$ etc. alla verticale.

Si ripigli la costruzione e la figura dell' art. 166. Potendo quì la $G\,S$ (Fig. 21) essere obbliqua al letto $M\,m$ purchè cada verso l'asse $A\,B$, sarà generalmente $\frac{G\,V}{G\,O} > \frac{M\,R}{m\,R}$.

Chiamando dunque $\int y\,d\,P$ il peso dell'unghia $M\,A\,\mu'$ (Fig. 24) A la spinta orizzontale nel vertice, e l'inclinazione del piano

$M\mu'$ alla verticale, sarà $\frac{\int y\,dP}{A} > \frac{\text{sin. } e}{\text{cos. } e}$, o sia $\frac{\int y\,dP}{A} >$ tang. e. E quì siccome le quantità $\int y\,dP$, e tang. e partono entrambe dallo zero, e crescono continuamente, è forza che le prime crescano in ragion maggiore delle seconde; onde sarà pure differenziando $y\,dP > \frac{A\,de}{\text{cos. } e^2}$.

178. *Coroll. I.* Nessuna Cupola può rimanere equilibrata per se medesima, quando s'appoggi sopra pulvinare orizzontale.

179. *Coroll. II.* Sia z la grossezza Mm della Cupola nel punto M, cui risponde l'ascissa x. Il valore del solido $M\nu'$ si trova col moltiplicare l'area $MmnN$ (168) per l'arco descritto dal suo centro di gravità (77). Facendo dunque $= 1$ l'angolo cui sottende l'arco $M\mu$, troveremo pel valore del solido $M\nu'$ l'espression seguente

$$\left\{\frac{1}{2}\,z^2\,de + z\,(dx \text{ sin. } e + dy \text{ cos. } e)\right\} \times \left\{y + \frac{1}{3}\,z \text{ sin. } e\,\frac{3\,ds + 2z\,de}{2\,ds + z\,de}\right\}.$$

Dovrà dunque la grossezza in ciascun punto

esser tale, che questa espressione non diventi mai minore di $\frac{A\,de}{\text{cos. } e^2}$.

180. *Coroll. III.* Siano i letti perpendicolari alla curva interna; il qual caso è così frequente in pratica, che può aversi per universale. Essendo allora sin. $e = \frac{dx}{ds}$; cos. $e = \frac{dy}{ds}$, ed il raggio osculatore $R = \frac{ds}{de}$, riducendo e dividendo per de avremo

$$\frac{2}{3}\,z^3 \text{ sin. } e + (y + R \text{ sin. } e)\,z^2 + 2\,Ryz > \frac{2A}{\text{cos. } e^2}$$

Potremo per mezzo di questa comparazione, data la curva che col suo giro genera il concavo della Cupola, regolare le grossezze de' cunei a luogo a luogo in guisa che si mantenga l'equilibrio: oppure data essa curva, e date ancora le grossezze, giudicare se una tal Cupola sia per riuscire equilibrata.

LIBRO SECONDO

DEL MOTO.

CAP. I.

Del moto equabile, e del moto vario.

181. Nel moto *equabile* la velocità si mantien costante, nel moto *vario* ella va crescendo o scemando; e nel primo caso il moto dicesi *accelerato*, nel secondo *ritardato*. Nasce il moto equabile da una forza che dopo d'aver comunicata al mobile una determinata velocità lo abbandona, conservando esso per l'inerzia (7) la velocità impressa. Nasce il moto vario da una forza che agendo continuamente sul mobile va ad ogni istante accrescendogli o togliendogli velocità. Una tal forza dicesi *acceleratrice* o *ritardatrice*, e si misura ad ogni istante dal rapporto di quel minimo grado di velocità che essa aggiunge o leva al mobile, a quel minimo tempo nel quale glielo aggiunge, o glielo leva.

182. E se questo rapporto è costante, così che in eguali tempetti si accrescano o si tolgano al mobile eguali gradi di veloci-

tà, la *forza acceleratrice* o *ritardatrice* è *costante*, e il moto che ne deriva dicesi *equabilmente accelerato* o *ritardato*. Da tutto ciò agevolmente si traggono le Proposizioni seguenti.

183. *Proposizione I.* Nel moto equabile la velocità essendo costante, gli spazj percorsi sono proporzionali ai tempi ne' quali si percorrono.

184. *Proposizione II.* Nel moto vario chiamando φ la forza acceleratrice, u la velocità, s lo spazio, t il tempo, la relazione fra queste quantità è determinata dalle due equazioni

$$u = \frac{ds}{dt}\,;\ \varphi = \frac{du}{dt}$$

185. *Coroll. I.* Da queste due equazioni eliminando prima t, poscia u, traggonsi quest' altre due

$$\varphi\, ds = u\, du \quad ; \quad \varphi\, dt = d.\frac{ds}{dt}$$

le quali però essendo contenute nelle due prime, non arrecano veruna nuova determinazione.

186. *Coroll. II.* Avendosi pertanto due equazioni fra le quattro indeterminate φ, u, s, t; date due qualunque fra queste, si conosceranno le altre due; e data una sola, si conoscerà la relazione che passa fra due qualunque delle altre.

Digitized by Google

187. *Coroll. III.* Le equazioni precedenti si riferiscono immediatamente al moto accelerato; si adattano al moto ritardato, facendo la du negativa.

CAP. II.

Del moto equabilmente accelerato o ritardato.

188. PROPOSIZIONE *I.* Nel moto equabilmente accelerato, partendo il mobile dalla quiete, ed essendo animato da una forza acceleratrice costante g, si hanno l'equazioni seguenti

$$u = gt\,;\; s = \frac{u^2}{2g}\,;\; s = \frac{gt^2}{2}$$

l'ultima delle quali è contenuta nelle due prime.

Poichè l'equazione $\Phi dt = du$, fatto $\Phi = g$, integrata dà $u = gt$; poscia l'altra equazione $\Phi ds = u\,du$ dà similmente $2gs = u^2$; e finalmente dalle due prime eliminando u s'ottiene la terza. Nè occorre nelle integrazioni aggiunger costante, poichè u, s, t svaniscono contemporaneamente giusta l'ipotesi.

189. *Coroll. I.* Le velocità crescono dunque come i tempi; e gli spazj come i quadrati de' tempi, o delle velocità.

190. *Coroll. II.* Gli spazj descritti in eguali e successivi intervalli di tempo, cominciando dal principio del moto, seguono la ragione de' numeri dispari 1, 3, 5, 7 etc.

191. *Coroll. III.* Se il mobile ha percorso nel tempo t lo spazio s con moto equabilmente accelerato, ed acquistata la velocità u; ed indi per egual tempo t prosegua a moversi con moto equabile, e colla velocità acquistata u, esso descriverà lo spazio doppio $2s$.

192. *Coroll. IV.* La misura della forza acceleratrice costante g si ottiene quando si conosca lo spazio che il mobile ha descritto in un dato tempo t: poichè si ha $g = \frac{2s}{t^2}$.

193. *Coroll. V.* Vagliono l'equazioni anzidette, se il mobile partì dalla quiete, siccome s'è avvertito; ma se esso aveva una velocità impressa c, convien tenerne conto nel determinar le costanti da aggiungere agl'integrali di $\Phi dt = du$, e di $\Phi ds = u\,du$; con che si avranno in iscambio delle prime le tre equazioni che seguono

$$u = c + gt;\ s = \frac{u^2 - c^2}{2g};\ s = ct + \frac{gt^2}{2}.$$

194. *Proposizione II.* Nel moto equabilmente ritardato, essendo c la velocità iniziale del mobile in direzione contraria a

quella della forza acceleratrice, vagliono l' equazioni

$$u = c - g t\,;\; s = \frac{c^2 - u^2}{2g}\,;\; s = c t - \frac{g t^2}{2}$$

le quali si ottengono speditamente dall' integrazione delle equazioni generali (187) $\varphi\, d t = - d u\,;\; \varphi\, d s = - u\, d u$.

195. *Coroll. I.* La durata di questo moto, e lo spazio scorso sino all' estinzione della velocità impressa c, si esprimono come segue

$$t = \frac{c}{g}\,;\; s = \frac{c^2}{2g}.$$

196. *Coroll. II.* Or questo tempo, e questo spazio sono appunto quegli stessi, ne' quali il mobile partendo dalla quiete con moto equabilmente accelerato acquista la velocità c. Laonde se dopo spenta la velocità impressa, la forza acceleratrice prosegue ad agire, il mobile ricalcherà la stessa traccia, e tornerà in tempo eguale al punto onde partì, dove giunto avrà ricovrata in senso opposto la velocità iniziale c.

197. *Coroll. III.* Nel moto equabilmente ritardato le velocità sono come i tempi che restano sino alla cessazione del moto; e gli spazj che restano a descrivere sino alla cessazione del moto sono come i quadrati de' tempi, o delle velocità.

CAP. III.

Del moto verticale de' gravi.

198. PROPOSIZIONE. Il moto de' gravi nella discesa verticale libera è moto equabilmente accelerato, e nella salita equabilmente ritardato.

Ciò è palese dall'essere la gravità (53) una forza costante e continuamente applicata in direzione verticale.

199. *Coroll. I.* Si disse pure che un grave scendendo liberamente dalla quiete percorre in 1″ lo spazio di piedi 15,098 di Parigi, o sia di metri 4,9044. Quindi prendendo 1″ per unità de' tempi, ed il metro per unità degli spazj, avremo per l'espressione di questa forza acceleratrice (192) $g = 9,8088$.

200. *Coroll. II.* Volendosi pertanto la velocità acquistata, o lo spazio descritto dal grave cadente per un dato tempo t, o viceversa, serviranno le formole

$$u = 9,8088\, t \quad ; \quad t = 0,1019\, u$$
$$s = 4,9044\, t^2 \quad ; \quad t = 0,4515\, \sqrt{s}$$

201. *Coroll. III.* Che se vogliasi la velocità acquistata dal grave scendente per una data altezza s, o sia, come soglion chiamarla, la velocità *dovuta* all'altezza s; o se viceversa data la velocità si chiegga l'al-

tezza s a lei *dovuta*, eccone le formole.

$$u = 4,4292 \sqrt{s} \quad ; \quad s = 0,0510\, u^2 .$$

202. *Coroll. IV.* Un grave lanciato in alto con velocità c salirà nel tempo $0,1019\, c$ all' altezza $0,0510\, c^2$. Di lì comincierà a scendere, ed in altrettanto tempo quanto fu quello della salita tornerà al punto onde fu lanciato, avendo ricovrata la velocità di projezione c.

203. *Scolio.* In questo Capo e ne' seguenti consideriamo il corpo come se fosse un atomo o punto materiale, prescindendo affatto dalla massa e dalla figura. Vedremo infatti a suo luogo che queste affezioni non cangiano il moto libero prodotto dalla gravità.

CAP. IV.

Moto verticale de' gravi ne' mezzi resistenti.

204. *IPOTESI.* La resistenza dell' aria, e d' ogni altro *mezzo* fluido in pari circostanze è proporzionale al quadrato della velocità del corpo che in esso si move.

Questa forza ritardatrice può dunque esprimersi per u^2 moltiplicato per un coefficiente costante, che per comodità del calcolo faremo $g\,k^2$, onde sia la forza ritardatrice $g\,k^2\,u^2$. Questo coefficiente poi dipende

dalla figura del corpo, e dal rapporto del suo peso specifico a quello del fluido, onde il valore di k è lo stesso per uno stesso corpo, e per uno stesso fluido, ma cangia ne' diversi corpi, e ne' mezzi diversi, secondo le leggi che nell' Idraulica s' insegnano.

205. *Proposizione I.* Scendendo un grave dalla quiete attraverso un mezzo resistente, cercasi la relazione fra lo spazio, il tempo, e la velocità.

Quì la forza acceleratrice è $g - g k^2 u^2$. Fatto dunque $\Phi = g(1 - k^2 u^2)$ l' equazioni $\Phi dt = du$, e $\Phi ds = u du$ divengono

$$g dt = \frac{du}{1 - k^2 u^2} \quad ; \quad g ds = \frac{u du}{1 - k^2 u^2}.$$

S' integrino queste due equazioni, determinando a dovere le costanti per la condizione che quando $t = 0$, si ha insieme $s = 0$, $u = 0$. E si otterranno le due equazioni

$$u = \frac{1}{k} \cdot \frac{e^{2gkt} - 1}{e^{2gkt} + 1}$$

$$s = \frac{1}{2gk^2} \cdot \log. \frac{1}{1 - k^2 u^2}$$

onde eliminando u, avremo la terza

$$s = \frac{1}{gk^2} \cdot \log. \frac{1}{2} \left\{ e^{gkt} + e^{-gkt} \right\}$$

206. *Coroll.* La velocità del grave cadente non può mai oltrepassare, e nè anche ag-

giugnere il limite $u = \frac{1}{k}$. S' avvicina però moltissimo a questo limite, ed il moto si rende sensibilmente uniforme dopo un certo tempo tanto più breve quanto è maggiore il coefficiente k della resistenza.

207. *Proposizione II.* Salendo un grave verticalmente attraverso un mezzo resistente, ed essendo c la velocità di projezione, si cerca la relazione tra lo spazio, il tempo, e la velocità.

Qui la forza ritardatrice è $g + g k^2 u^2$; onde fatto $\Phi = g(1 + k^2 u^2)$ l' equazioni $\Phi dt = -du$, $\Phi ds = -u du$ divengono

$$g dt = \frac{-du}{1 + k^2 u^2} \quad ; \quad g ds = \frac{-u du}{1 + k^2 u^2}.$$

E qui pure integrando, e determinando le costanti come conviene affinchè $t = 0$ dia $s = 0$, $u = c$ si troverà

$$u = \frac{1}{k} \cdot \frac{kc - \text{tang. } gkt}{1 + kc \text{ tang. } gkt}$$

$$s = \frac{1}{2gk^2} \cdot \log. \frac{1 + k^2 c^2}{1 + k^2 u^2}$$

ed eliminando u,

$$s = \frac{1}{gk^2} \log. (\cos. gkt + kc \sin. gkt).$$

208. *Coroll.* La durata di questo moto, e l' altezza della salita si ottengono, ponendo

nelle precedenti equazioni $u = 0$; onde si ha

$$t = \frac{1}{gk} \text{Arc. tang. } kc \; ; \; s = \frac{1}{2gk^2} \log. (1 + k^2 c^2)$$

CAP. V.

Del moto curvilineo.

209. PROPOSIZIONE. Sia il mobile sollecitato da due forze acceleratrici P, Q agenti secondo due assi che prenderemo per gli assi delle x e delle y. Vuolsi determinare la *trajettoria*, cioè la linea descritta dal mobile, e le circostanze tutte del moto.

Decomposta la velocità del mobile in due parallele a ciascuna delle coordinate x, y, sono queste due velocità parziali $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, la prima delle quali è prodotta dalla forza P, la seconda dalla forza Q. Quindi l'equazione (184) $\varphi\, dt = du$ ne dà queste due,

$$P\,dt = d.\frac{dx}{dt} \quad ; \quad Q\,dt = d.\frac{dy}{dt}$$

e queste contengono la soluzion del problema.

Poichè in primo luogo eliminando t, avremo fra le coordinate x, y un equazione, che sarà quella della trajettoria.

Poscia integrando quelle due equazioni, avremo

$$\frac{dx}{dt} = \int P\,dt \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = \int Q\,dt$$

e così conosceremo ad ogni istante le due velocità parziali del mobile nel senso de' due assi, dalla composizione delle quali risulta la sua velocità assoluta.

In fine integrando nuovamente, abbiamo

$$x = \int dt \int P\,dt \quad ; \quad y = \int dt \int Q\,dt$$

e così sapremo ad ogni istante il luogo ove trovasi il mobile.

210. *Coroll.* Se gli assi sono ortogonali, la velocità del mobile viene espressa in guisa molto semplice. Poichè per una parte abbiamo $u^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}$, onde prendendo dt costante viene

$$u\,du = \frac{dx\,ddx + dy\,ddy}{dt^2}$$

Per l'altra parte le due equazioni del moto, essendo dt costante, diventano

$$P = \frac{ddx}{dt^2} \quad ; \quad Q = \frac{ddy}{dt^2}$$

che moltiplicate rispettivamente per dx e dy, poi sommate, danno

$$P\,dx + Q\,dy = \frac{dx\,ddx + dy\,ddy}{dt^2}$$

Adunque

$$u\,du = P\,dx + Q\,dy$$

onde si conoscerà la velocità del mobile in qualunque punto della trajettoria.

211. *Scolio*. Per quante siano le forze acceleratrici, se tutte agiscono nello stesso piano, si potranno sempre ridurre alle doe P, Q, e la soluzion precedente avrà luogo. Che se agissero in diversi piani, converrebbe allora ridurle a tre P, Q, R, parallele a tre assi, ed introdurre la terza coordinata z. Così si avranno tre equazioni in tutto analoghe alle precedenti, e per la forma e pel modo di maneggiarle. La trajettoria sarà una linea a doppia curvatura, e verrà espressa dalle due equazioni fra x, y e z che risulteranno dall' eliminazione di t.

CAP. VI.

De' gravi projetti.

212. PROPOSIZIONE. Sia un grave lanciato obbliquamente alla verticale con velocità dovuta all' altezza H. Prendendo le ascisse x nella verticale condotta pel punto di partenza, e le ordinate y parallele alla linea di projezione, l' equazione della curva descritta dal projetto è $y^2 = 4Hx$.

Ripigliamo l' equazioni generali (209)

$$P\,dt = d.\frac{dx}{dt} \quad ; \quad Q\,dt = d.\frac{dy}{dt}$$

Essendo $P = g$, $Q = 0$, avremo per una prima integrazione

$$\frac{dx}{dt} = A + gt \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = B$$

Per determinar le costanti osserviamo che al principio del moto, quando $t = 0$, la velocità nel senso delle x è $= 0$, e la velocità nel senso delle y è dovuta all'altezza H, o sia è $= \sqrt{2gH}$. Quindi $A = 0$, $B = \sqrt{2gH}$. Messi questi valori, e rinovata l' integrazione, si ha

$$x = \frac{1}{2}gt^2 \quad ; \quad y = t\sqrt{2gH}$$

senza uopo di nuove costanti, poichè già $t = 0$ dà $x = 0$, $y = 0$. Ora eliminando t, si ottien subito $y^2 = 4Hx$.

213. *Coroll. I.* La trajettoria de' gravi projetti è una parabola, avente per diametro la verticale condotta pel punto di partenza, ed il parametro di questo diametro è quadruplo dell' altezza dovuta alla velocità di projezione.

214. *Coroll. II.* Mutiamo le coordinate (Fig. 25) ed in luogo dell' ascissa $AP = x$, ed ordinata $PM = y$ introduciamo per ascissa l' orizzontale $AQ = z$, essendo ordinata

la $QM = u$. Sia l'angolo di *elevazione*, o di projezione $TAQ = f$. Condotta per P l'orizzontale PR che incontri in R la MQ prolungata, sarà

$MR = PM \cdot \text{sin.}\, f$; $PR = PM \cdot \text{cos.}\, f$; o sia

$$u + x = y \text{ sin.}\, f \quad ; \quad z = y \text{ cos.}\, f.$$

Quindi $u = z \text{ tang.}\, f - x$. Altronde (212) $x = \frac{y^2}{4H} = \frac{z^2}{4H \text{ cos.}\, f^2}$. Dunque finalmente

$$u = \text{tang.}\, f - \frac{z^2}{4H \text{ cos.}\, f^2}.$$

215. *Coroll. III.* Cercando il valor massimo di u si avrà il vertice della parabola, indicante la massima *altezza* a cui sale il projetto. Esso corrisponde alle coordinate

$$z = H \text{ sin.}\, 2f \quad ; \quad u = H \text{ sin.}\, f^2.$$

Quindi può facilmente trovarsi o col calcolo, o per via di costruzione geometrica.

216. *Coroll. IV.* Chiamando A la portata orizzontale, o sia l'*ampiezza* del tiro AB, hassi $A = 2H \text{ sin.}\, 2f$.

E quì date due qualunque fra le tre quantità A, H, f potrà trovarsi la terza o col calcolo, o sinteticamente.

Ovvero più generalmente, date tre qualunque fra le quattro quantità u, z, H, f potrà trovarsi la quarta, dall' equazione dell' art. 214.

217. *Coroll. V.* L'ampiezza è massima quan-

do il tiro si fa ad angolo semiretto; ed è allora $A = 2H$; si hanno poi ampiezze eguali con due tiri, l'uno de' quali di tanto ecceda l'angolo semiretto di quanto l'altro ne manca.

218. *Coroll. VI.* Apparisce dalle cose precedenti essere il moto de' projetti composto di due moti, l'uno equabile con direzione orizzontale, e con velocità costante $= \cos. f\sqrt{2gH}$; l'altro con direzion verticale, ed uniformemente variato, essendo g la forza acceleratrice, e $\sin. f\sqrt{2gH}$ la velocità impressa. Quindi il tempo impiegato dal projetto a passare una distanza orizzontale z vien espresso dalla formola seguente

$$t = \frac{z}{\cos. f\sqrt{2gH}}$$

CAP. VII.

Via de' projetti nell'aria.

219. Esprima gR la resistenza del mezzo. Esercitandosi questa forza secondo l'elemento ds della curva descritta dal projetto, se riferisco questa curva all'asse orizzontale condotto pel punto di partenza, chiamando x le ascisse orizzontali, ed y le ordinate verticali, e decompongo la resistenza gR

in due forze, l'una parallela alle x, l'altra alle y, sarà (33) la prima $g R \frac{dx}{ds}$, e la seconda $g R \frac{dy}{ds}$. Adunque il grave avrà nel senso delle x la forza $-g R \frac{dx}{ds}$, e nel senso delle y la forza $-g - g R \frac{dy}{ds}$. Ciò posto la ricerca della trajettoria riducesi al problema generale dell'art. 209.

220. *Proposizione*. Determinare la trajettoria de' gravi in un mezzo resistente.

Avremo (209) l'equazioni

$$-g R \frac{dx}{ds} dt = d \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$-g dt - g R \frac{dy}{ds} dt = d \cdot \frac{dy}{dt}$$

dalle quali conviene eliminare t.

Differenziando il secondo membro d'entrambe col prender costante l'elemento dx, e sostituendo dalla prima nella seconda il valore del ddt, vengono quest'altre due

$$ds\,ddt = g R dt^2 \quad ; \quad ddy = -g dt^2$$

e differenziando quest'ultima

$$d^2 y = -2g dt\,ddt.$$

Ora è facile eliminar da queste equazioni

gli elementi dt, ddt; onde verrà

$$2R\,dd\,y^2 + ds\,d^2y = 0$$

equazione della trajettoria. E quindi data la legge della resistenza si conoscerà la curva descritta dal projetto, e viceversa.

221. *Coroll. I.* Essendo la resistenza proporzionale al quadrato della velocità, poremo (204) $gR = gk^2u^2 = gk^2\frac{ds^2}{dt^2}$. Ma $dt^2 = -\frac{dd\,y}{g}$. Dunque $R = -gk^2\frac{ds^2}{dd\,y}$. Onde l'equazione della trajettoria diviene

$$\frac{d^2y}{dd\,y} = 2gk^2\,ds$$

ed integrando $\frac{dd\,y}{dx^2} = Ae^{2gk^2s}$

Per determinare la costante A mettasi per $dd\,y$ il suo valore $-g\,dt^2$; verrà

$$\frac{dx^2}{dt^2} = -\frac{g}{Ae^{2gk^2s}}$$

Ora nel principio del moto quando $s = 0$, la velocità orizzontale $\frac{dx}{dt}$ è $=$ cos. $f\sqrt{2gH}$, chiamando f l'angolo d'elevazione, ed H l'altezza dovuta alla velocità di projezione. Di quì risulta $A = -\frac{1}{2H\cos.f^2}$, e l'equa-

zione diviene $\frac{d\,d\,y}{d\,x^2} = -\frac{e^2\,g\,k^2\,s}{2\,H\cos.\,f}$

Ma non si può procedere ad ulteriore integrazione, e' convien cercar de' ripieghi onde conoscere per approssimazione l'andamento della trajettoria.

222. *Coroll. II.* Di questi artificj il più semplice è quello di tentare l'integrazione per serie. A tale effetto suppongasi

$y = L\,x + M\,x^2 + N\,x^3 + P\,x^4 + \text{etc.}$

onde sarà

$$\frac{d\,y}{d\,x} = L + 2\,M\,x + 3\,N\,x^2 + 4\,P\,x^3 \text{ etc.}$$

$$\frac{d\,d\,y}{d\,x^2} = 2\,M + 6\,N\,x + 12\,P\,x^2 \text{ etc.}$$

$$\frac{d^3\,y}{d\,x^3} = 6\,N + 24\,P\,x \text{ etc.}$$

Qui la determinazione de' due primi coefficienti L, M è facilissima; poichè sappiamo già che quando $x = 0$, è

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \text{tang.}\,f, \text{ e } \frac{d\,d\,y}{d\,x^2} = -\frac{1}{2\,H\cos.\,f^2}$$

quindi $L = \text{tang.}\,f$; $M = -\frac{1}{4\,H\cos.\,f^2}$

Quanto agli altri coefficienti N, P, Q etc. per determinarli fa d'uopo sostituire nell'equazione $d^3\,y = 2\,g\,k^2\,d\,s\,d\,d\,y$ i valori precedenti, ed insieme quello di $d\,s$ che è

$= dx\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}$ e l'equazion che ne viene dovendo essere identica, servirà a determinare i coefficienti cercati. Per questo mezzo si ottiene la seguente serie

$$y = x.\text{tang.}f - \frac{x^2}{4}\cdot\frac{1}{H\cos.f^2} - \frac{x^3}{2.3}\cdot\frac{gk^2}{H\cos.f^2}$$
$$- \frac{x^4}{3.4}\left(\frac{g^2k^4}{H\cos.f^4} - \frac{gk^2\sin.f}{4H^2\cos.f^3}\right) \text{etc.}$$

Se la resistenza è nulla, sarà $k = 0$, e torna l'equazione dell' art. 214.

223. *Scolio*. Ma questa serie non sempre è utile, facendosi in molti casi divergente. Quindi la necessità d' altri ripieghi, per mezzo de' quali s' è giunto a segnare in tutti i casi l' andamento intero della trajettoria con quella approssimazione che nella pratica può desiderarsi maggiore (*a*).

CAP. VIII.

Del moto sopra una curva data.

224. PROPOSIZIONE *I.* Sia il mobile sollecitato da due forze P, Q, secondo le coordinate ortogonali x, y, e posto sopra una data curva non possa moversi che per

(a) *V. Borda Mem. de l' Acad. Paris.* 1769 *Moreau Journal polytechn. Cah. XI.*

quella. Vuolsi determinare la relazione tra lo spazio, il tempo, e la velocità.

In luogo delle forze P, Q si pongano altre due T, N la prima secondo la tangente, l'altra secondo la normale alla curva. E sarà (32)

$$T = \frac{P\,dx + Q\,dy}{ds} \quad ; \quad N = \frac{P\,dy - Q\,dx}{ds}$$

Ora è palese che la sola forza T accelera il mobile, mentre la N rimane ad ogni istante distrutta. Adunque il moto vien determinato dalle equazioni

$$T\,dt = du \quad ; \quad T\,ds = u\,du.$$

E qui essendo date le forze P, Q ed essendo pur data per la natura della curva la relazione fra x, y ed s, apparisce che sarà T una funzion data di s, che introdotta nelle equazioni precedenti farà conoscere le circostanze tutte del moto.

225. *Coroll. I.* Se il mobile non è sollecitato da veruna forza acceleratrice, il suo moto è uniforme, e per qualunque curva cammini ritiene senza alterazione la velocità impressa.

226. *Coroll. II.* Se il mobile è sollecitato dalla sola gravità g, prendendo le ascisse x verticali, sarà $T = \frac{g\,dx}{ds}$; quindi $g\,dx = u\,du$, ed $u = \sqrt{2\,g\,x}$.

Perciò scendendo un grave o salendo per

una curva qualunque, ha in ogni punto la stessa velocità che avrebbe se fosse disceso o salito verticalmente per uguale altezza.

227. *Proposizione II.* Nella stessa ipotesi vuolsi determinare la pressione che il mobile esercita sulla curva.

Nasce la pressione in primo luogo dalla forza normale N proveniente dalle potenze sollecitanti. Questa forza rimanendo affatto elisa, tutta s'adopra nel premere la curva.

Nasce la pressione in secondo luogo dalla forza centrifuga proveniente dall'inerzia del mobile. Conviene ora mostrare onde abbia origine questa forza, e come si misuri. Scenda il mobile (Fig. 26) per la curva AMB, e nel tempetto dt abbia passato lo spazietto Mm. Giunto in m esso tende per l'inerzia a descrivere nel tempetto seguente $= dt$ la retta $mq = Mm$. Siccome la resistenza della curva l'obbliga a piegare pel laterculo $m\mu$, così decomponendo la velocità virtuale mq nelle due $m\mu$, mp, quest'ultima rimane elisa dalla curva, e perciò il mobile la premerà normalmente con la forza corrispondente a questa velocità estinta. Questa è la forza cui si dà il nome di *forza centrifuga*.

Esprimiamone analiticamente il valore. Questa forza nel momento dt farebbe scorrere al mobile lo spazietto mp; essa può

aversi per costante, giacchè non si considera agire che per l' istante dt. Dunque dall' equazione (192) $g = \frac{2s}{t^2}$ scorgesi che questa forza è $= \frac{2mp}{dt^2}$.

Sia R il raggio osculatore della curva AMB in m. L' arco $Mm\mu$ potrà aversi per un arco circolare di raggio R. Per la proprietà del circolo mq è media proporzionale tra mp ed $mp + 2R$; o sia tra mp e $2R$. Dunque $mp = \frac{mq^2}{2R}$. Ma $mq = Mm = ds = udt$. Dunque $mp = \frac{u^2 dt^2}{2R}$; onde la forza centrifuga rimane espressa per $\frac{u^2}{R}$.

Adunque la total pressione del mobile sulla curva è $\frac{u^2}{R} + \frac{Pdy - Qdx}{ds}$ rappresentando il primo termine l' effetto della forza centrifuga, e l' altro quello delle potenze sollecitanti.

228. *Scolio*. Circa quest' espressione è da notare che la forza $\frac{Pdy - Qdx}{ds}$ si assume fare angolo acuto colle x positive (32) e se avesse direzione contraria, ne avvisa il se-

gno che riuscirà negativo. Ma la forza centrifuga $\frac{u^2}{R}$ è sempre opposta alla direzione del raggio osculatore. Con quest'avvertenza si potrà in ogni caso riconoscere in qual senso si eserciti la pressione; ed ove avvenga che questa non spinga il mobile contro la curva, ivi il corpo si stacca dalla curva e ne abbandona la traccia. Ove poi avvenga che il valor della pressione riesca zero, ivi il mobile rade la curva senza premerla.

229. *Coroll. I.* Ne' moti curvilinei liberi non v'ha pressione, poichè l'effetto della forza centrifuga elide quello delle potenze sollecitanti.

In fatti dalle equazioni del moto libero (209) moltiplicate rispettivamente per dy, dx, e sottratte l'una dall'altra ricavasi

$$P\,dy - Q\,dx = \frac{dy}{dt}\,d.\frac{dx}{dt} - \frac{dx}{dt}\,d.\frac{dy}{dt}$$

Ora differenziando nel secondo membro coll'assumere l'elemento dx costante, poi riducendo, e dividendo per ds, viene

$$\frac{P\,dy - Q\,dx}{ds} = -\frac{dx\,ddy}{ds\,dt^2}$$

Ma quando dx è costante, abbiamo

$$R = \frac{ds^3}{dx\,ddy}$$

Dunque $\frac{P\,dy - Q\,dx}{ds} = -\frac{ds^2}{R\,dt^2} = -\frac{u^2}{R}$.

230. *Coroll. II.* Se il mobile cammina per una velocità preconcepita senza veruna forza acceleratrice, la pressione è dovuta alla forza centrifuga; e però proporzionale al quadrato della velocità, ed inversamente al raggio di curvatura.

231. *Coroll. III.* Per lo contrario allor quando il mobile cammina per una retta, la forza centrifuga è nulla, ed il mobile preme soltanto colla forza normale proveniente dalle potenze sollecitanti. Così avviene ai gravi scendenti lungo i piani inclinati, siccome tosto mostreremo.

CAP. IX.

Discesa de' gravi pei piani inclinati.

232. PROPOSIZIONE. Posto un grave su d'un piano inclinato alla verticale coll'angolo m, e decomposta la gravità g in due forze l'una parallela, l'altra normale al piano, sarà la prima $= g \cos. m$; la seconda $= g \sin. m$. Per la prima il grave scende lungo il piano, colla seconda preme il piano stesso.

233. *Coroll. I.* Se la lunghezza AB del piano (Fig. 27) rappresenti la gravità, l'altezza AC ne rappresenta quella parte che s'adopra nello spingere il grave lungo il piano, e la base BC rappresenta l'altra parte che s'adopra nel premere il piano.

234. *Coroll. II.* Il moto di discesa è equabilmente accelerato, e si determina colle equazioni (188)

$$u = g\,t\cos.\,m\,;\quad s = \frac{u^2}{2\,g\cos.\,m}\,;\quad s = \frac{g\,t^2\cos.\,m}{2}\,.$$

Che se il grave sale pel piano in virtù d'una velocità impressa, il moto sarà equabilmente ritardato, e si determinerà parimente colle equazioni (194) per tutto in luogo di g ponendo $g\cos.\,m$.

235. *Coroll. III.* Le velocità acquistate, e gli spazj percorsi in egual tempo da due gravi cadenti l'uno per la verticale, l'altro pel piano inclinato, sono fra loro come $1 : \cos.\,m$; o sia come la lunghezza del piano all'altezza.

236. *Coroll. IV.* Quindi nel mentre che il primo discende per tutta l'altezza AC, l'altro arriva al punto D ove cade la perpendicolare CD condotta da C sopra il piano AB.

237. *Coroll. V.* Tutte le corde d'un circolo che partono dall'una delle due estremità d'un diametro verticale sono percorse nello

stesso tempo; cioè in quello nel quale il grave liberamente cadendo percorrerebbe quel diametro.

CAP. X.

Del Pendolo semplice.

238. PROPOSIZIONE *I.* Rimossa ogni resistenza ed ogni impulso straniero le oscillazioni d'un pendolo grave continuano all' infinito eguali tra loro ed isocrone.

Infatti dalle cose dette agli articoli 196 e 226 apparisce che il grave salirà in pari tempo ad un altezza uguale a quella onde scese; indi ritornerà per la stessa via, ricalcando senza fine l' arco che da principio descrisse.

239. *Proposizione II.* Nel pendolo cicloidale, chiamando $\frac{1}{2}a$ il diametro del circolo generatore, b la saetta dell'arco descritto dal pendolo, prendendo le ascisse x dal punto infimo, il tempo della discesa si esprime colla formola seguente

$$t = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{g}} \int \frac{-dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}.$$

La velocità u del grave nel punto corrispondente all'ascissa x sarà (226) $\sqrt{2g(b-x)}$. Ora $u = -\frac{ds}{dt}$, e qui si prende il segno —

perchè l' arco s va scemando al crescer di t. Dunque $dt = \frac{-ds}{\sqrt{2g(b-x)}}$. Ma per la proprietà della cicloide è $s = \sqrt{2ax}$, e $ds = \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax}}$. Sostituito questo valore, trovasi l' annunciata espressione di t.

240. *Coroll. I.* Integrando, e determinando l' integrale in guisa che cominci quando $x = b$, e si compia quando $x = 0$, hassi il tempo dell' intera discesa, o sia d'una mezza oscillazione. L' integrale trovasi = Arc. cos. $\frac{2x-b}{b}$; ne' v' ha bisogno di costante, poichè esso si annulla quando $x = b$. Posto poi $x = 0$, esso diviene $= \pi$. Quindi il tempo della mezza oscillazione risulta

$$t = \frac{\pi\sqrt{a}}{2\sqrt{g}}$$

241. *Coroll. II.* Le oscillazioni per archi cicloidali di qualunque ampiezza sono isocrone.

Ed in generale la cicloide collocata colla base orizzontale, e coll'asse verticale all'ingiù ha questa proprietà, che da qualunque punto della sua circonferenza si lasci cadere un grave, esso arriva al punto infimo nello stesso tempo. Per questa proprietà dicesi la cicloide tautocrona.

242. *Scolio*. Essendo la cicloide evoluta di se medesima, si ottiene il pendolo cicloidale facendo oscillare il filo fra due lame curvate a foggia di due archi eguali di cicloide.

243. *Proposizione III.* Nel pendolo circolare, chiamando a il raggio del circolo, b la saetta dell' arco descritto, e prendendo le ascisse verticali x dal punto infimo, esprimesi il tempo della discesa così

$$t = \frac{a}{\sqrt{2g}} \int \frac{\cdot\ -dx}{\sqrt{(b-x)(2ax-x^2)}}$$

Avremo infatti come prima (239)

$dt = \frac{-ds}{\sqrt{2g(b-x)}}$. Ma per la proprietà del circolo è $ds = \frac{a\,dx}{y} = \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$.

Dunque ec.

244. *Coroll. I.* Questa formola è più complicata della precedente, nè può integrarsi se non che per serie. Tuttavia se il pendolo oscilla per archi di poca ampiezza, cosicchè la saetta sia piccolissima rispetto del raggio, si può trascurare x^2 rispetto di $2ax$. Allora la formola dell' articolo precedente riviene a quella dell' art. 239; ed il tempo della mezza oscillazione riesce come prima

$$t = \frac{\pi\sqrt{a}}{2\sqrt{g}}$$

245. *Coroll. II.* Le oscillazioni per archi circolari di qualunque ampiezza purchè piccola, sono tra loro isocrone, e sono isocrone con quelle d' un pendolo cicloidale di eguale lunghezza.

246. *Coroll. III.* Il tempo della discesa per un piccol arco di cerchio, del quale la tangente infima sia orizzontale, è più breve del tempo della discesa per la sua corda, in ragione del quarto della circonferenza al diametro.

Infatti il tempo per l' arco è $\frac{\pi \sqrt{a}}{2\sqrt{g}}$; il tempo per la corda è ugnale (237) al tempo della discesa libera pel diametro verticale $2a$, e questo tempo (188) è $\frac{\sqrt{2s}}{\sqrt{g}}$ o sia $\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$. Sta dunque il tempo per l' arco al tempo per la corda come $\frac{1}{2}\pi : 2$.

247. *Coroll. IV.* Paragonando fra loro le oscillazioni di pendoli di lunghezza diversa, o siano essi cicloidali, oppure circolari, purchè scorrano per piccoli archi di cerchio, i tempi delle oscillazioni sono come le radici delle lunghezze.

E per conseguenza i numeri delle oscillazioni fatte nello stesso tempo sono inversamente come le radici delle lunghezze.

248. *Scolio.* L' isocronismo delle oscilla-

zioni per archi cicloidali di qualunque ampiezza minima, si può provare anche senza uopo d' integrazione nel modo seguente.

Siano terminati al punto infimo A (Fig. 23) i due archi di diversa ampiezza PA, pA. S' intenda diviso l' arco PA in un numero indefinito di elementari particelle PM, e l'arco pA in egual numero d' elementi pm. Se le forze acceleratrici colle quali il grave entra a descrivere gli archetti omologhi PM, pm sono proporzionali agli archetti medesimi, quegli archetti saranno descritti in egual tempo. Poichè essendo (188) $t^2 = \frac{2s}{g}$, egli è chiaro che se g è proporzionale ad s, sarà t costante. E se ciò avvenga in ciascuno de' punti omologhi degli archi PA, pA, è palese che ciascuno degli elementi del primo sarà percorso in pari tempo dell' elemento corrispondente del secondo, e così anche gli archi interi PA, pA saranno descritti contemporaneamente.

Ora o sia la curva PpA una cicloide, o sia un arco circolare di poca ampiezza, avviene appunto che le forze acceleratrici tangenziali in due punti omologhi qualunque P, p, sono proporzionali agli archi PA, pA, e quindi ancora agli elementi PM, pm. Sia infatti $AE = x$, $EP = y$, $AP = s$.

La forza tangenziale in P sarà (32) $\frac{-g\,dx}{ds}$.

Quì se PpA è una cicloide, abbiamo $s^2 = 2ax$, e quindi $\frac{dx}{ds} = \frac{s}{a}$; dunque $\frac{g\,dx}{ds} = \frac{gs}{a}$; e però la forza tangenziale in P è proporzionale all'arco PA.

Se poi PpA è un arco di cerchio, abbiamo $\frac{dx}{ds} = \frac{y}{a}$; quindi $\frac{g\,dx}{ds} = \frac{gy}{a}$. Ove se l'arco è assai piccolo la mezza corda y confondesi coll'arco s, onde quì pure la forza tangenziale in P è di nuovo proporzionale a PA.

CAP. XI.

Moto de' pendoli ne' mezzi resistenti.

249. OSCILLANDO il pendolo in un mezzo resistente, le vibrazioni vanno gradatamente restringendosi in ampiezze sempre minori. E tuttavia purchè l'ampiezza iniziale sia piccola, e piccola ancora la resistenza, queste vibrazioni tuttochè diseguali si mantengono sensibilmente isocrone fra loro, e quasi isocrone a quelle d'un pendolo di pari lunghezza che liberamente oscilli nel vuoto.

Faranno di ciò piena fede le Proposizioni seguenti (*a*).

250. *Proposizione I.* Oscilli il pendolo per l'arco cicloidale PAQ, partendosi dal punto P. Si cerca la velocità in ogni punto dell'arco.

Ritenute le denominazioni sin quì usate, sarà la forza tangenziale $-\frac{g\,dx}{ds} + g\,k^2\,u^2$.

Quindi l'equazione (224) $T\,ds = u\,du$ darà

$$u\,du = -g\,dx + g\,k^2\,u^2\,ds.$$

Pongo per la natura della cicloide $adx = sds$, e faccio per brevità $2g\,k^2 = h$. Verrà

$$2a\,u\,du - a\,h\,u^2\,ds = -2g\,s\,ds.$$

Quest'equazione rendesi integrabile pel moltiplicatore e^{-hs}. Integro adunque, e chiamando c la velocità che avrà il grave giunto al punto infimo A, determino la costante così che quando $s = 0$, venga $u = c$. Ed ho l'equazione

$$(M) \quad u^2 = e^{hs}\,c^2 + \frac{2g}{a\,h^2}\left(1 + h\,s - e^{hs}\right)$$

che mostra il progresso della velocità nell'arco della discesa PA.

Facendovi s negativo ho similmente per l'arco della salita AQ l'equazione

---

(*a*) *Euler Mechanica Tom. II. Prop.* 63.

$$(N)\quad u^2 = e^{-hs}c^2 + \frac{2g}{ah^2}\left(1 - hs - e^{-hs}\right).$$

251. *Coroll. I.* Sia $PA = E$, $AQ = F$. Egli è manifesto che se nell' equazione (M) faremo $s = E$, saravvi $u = 0$; e se nell' equazione (N) porremo $s = F$, sarà parimente $u = 0$. Di quì potremo avere espressa in due modi la velocità c corrispondente al punto infimo.

L' equazione (M) darà

$$\frac{ah^2c^2}{2g} = -e^{-hE}\left(1 + hE - e^{hE}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}h^2E^2 - \tfrac{1}{3}h^3E^3 + \tfrac{1}{8}h^4E^4 - \text{etc.}$$

Similmente l' equazione (N) darà

$$\frac{ah^2c^2}{2g} = -e^{hF}\left(1 - hF - e^{-hF}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}h^2F^2 + \tfrac{1}{3}h^3F^3 + \tfrac{1}{8}h^4F^4 + \text{etc.}$$

252. *Coroll. II.* Eguagliando fra loro queste due espressioni, verremo a scoprire la relazione tra i due archi E, F onde dato il primo si conosca il secondo. Hassi questa relazione dall' equazione

$$e^{-hE}(1 + hE) = e^{hF}(1 - hF).$$

Quì se facciamo $F = E - mE^2 + nE^3 - pE^4$ etc. e fatta la sostituzione, svolgendo tutto in serie, determiniamo i coefficienti m, n, p etc. troveremo

$$F = E - \tfrac{2}{3}hE^2 + \tfrac{4}{9}h^2E^3 - \text{etc.}$$

Se l'arco E sia piccolo, e piccola ancora la resistenza, pochi termini della serie basteranno. Noi per ora ci fermeremo nei tre primi, disprezzando le potenze di h superiori al quadrato.

253. *Coroll. III.* Conosciuto l'arco della salita nella prima oscillazione, si trovano senza fatica quelli delle seguenti. E già nella seconda oscillazione, cioè nel ritorno del pendolo l'arco della discesa sarà F, e però la salita sarà

$$F - \tfrac{2}{3} h F^2 + \tfrac{4}{9} h^2 F^3$$

o sia $$E - \tfrac{4}{3} h E^2 + \tfrac{16}{9} h^2 E^3 .$$

Similmente nella terza oscillazione la salita si troverà

$$E - \tfrac{6}{3} h E^2 + \tfrac{36}{9} h^2 E^3$$

e nella $n$esima sarà

$$E - \tfrac{2}{3} n h E^2 + \tfrac{4}{9} n^2 h^2 E^3$$

Così dopo n oscillazioni la differenza fra la prima discesa e l'ultima salita sarà

$$\tfrac{2}{3} n h E^2 - \tfrac{4}{9} n^2 h^2 E^3 .$$

Di quì si vede come e per quali gradi la corsa del pendolo vada continuamente accorciandosi. Ed è notabile che questo accorciamento non dipende punto dalla lunghezza del pendolo.

254. *Coroll. IV.* È anche degno d'osservazione che la velocità massima del grave oscillante non corrisponde già al punto in-

fimo A, ma ad un altro punto B. Questo punto si troverà giusta le note regole, eguagliando a zero il differenziale di u^2 (250). Sia $AB=S$, e la velocità massima in $B=C$. L' equazion del massimo sarà

$$(L) \qquad \frac{-hS}{e} = 1 - \frac{a h^2 c^2}{2g}.$$

Pongasi per $\frac{a h^2 c^2}{2g}$ il suo valore (251) e svolgendo in serie come sopra si fece (252) avrassi

$$S = \tfrac{1}{2} h E^2 - \tfrac{1}{3} h^2 E^3 + \tfrac{1}{4} h^3 E^4 - \text{etc.}$$

255. *Coroll. V.* Poscia nell' equazione (M) ponendo per $\frac{-hs}{e}$ il suo valore tratto dall' equazione (L) avremo

$$\frac{a h^2 C^2}{2g} = hS = \tfrac{1}{2} h^2 E^2 - \tfrac{1}{3} h^3 E^3 + \tfrac{1}{4} h^4 E^4 - \text{etc.}$$

Così sapremo qual sia ed in qual punto s' acquisti la massima velocità.

256. *Proposizione II.* Poste le stesse cose, si cerca il tempo dell' oscillazione per l' arco PAQ.

Giova cercar prima il tempo della discesa per PB, indi il tempo per BQ, e sommar poscia questi due tempi.

Facciasi pertanto $PB = q$, e sarà

$$s = q + S = q + \frac{a h C^2}{2g}.$$

Ora nell' equazione (M) io pongo in luogo di s questo valore, ed in luogo di c^2 il suo valore desunto dall'equazione (L); poi faccio $C^2 - u^2 = z$. Ed essa mi diviene

$$\frac{a h^2 z}{2g} = e^{hq} - 1 - hq$$

onde svolgendo in serie col solito mezzo (252) ricavo

$$q = \frac{\sqrt{a z}}{\sqrt{g}} - \frac{a h z}{6g} + \frac{a h^2 z \sqrt{a z}}{36 g \sqrt{g}} - \text{etc.}$$

Onde

$$dt = -\frac{ds}{u} = \frac{-dq}{\sqrt{(C^2 - z)}} = -\frac{dz\sqrt{a}}{2\sqrt{g}\sqrt{(C^2 z - z^2)}}$$

$$+ \frac{a h dz}{6g\sqrt{(C^2 - z)}} - \frac{a h^2 z dz \sqrt{a}}{24 g \sqrt{g}\sqrt{(C^2 z - z^2)}} + \text{etc.}$$

Integrando da $u = 0$, o sia $z = C^2$ sino ad $u = C$, o sia $z = 0$, si trae

$$t = \frac{\pi\sqrt{a}}{2\sqrt{g}} - \frac{a h C}{3g} + \frac{\pi h^2 C^2 a \sqrt{a}}{48 g \sqrt{g}} - \text{etc.}$$

che sarà il tempo della discesa per $P B$.

In simil guisa si avrà il tempo per $B Q$ rinovando il calcolo col fare q, e dq negativi, ed integrando da $z = 0$, sino a $z = C^2$. E sarà questo tempo

$$\frac{\pi\sqrt{a}}{2\sqrt{g}} + \frac{a h C}{3g} + \frac{\pi h^2 C^2 a \sqrt{a}}{48 g \sqrt{g}} + \text{etc.}$$

Or sommando i due tempi si avrà finalmen-

te il tempo dell' intera corsa per PBQ così espresso

$$\frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{g}}\left(1+\frac{a\,h^2\,C^2}{24\,g}+\text{ec.}\right)$$

257. *Coroll. I.* Pongasi in luogo di $\frac{a\,h^2\,C^2}{2\,g}$ il suo valore (255). Sarà il tempo dell' oscillazione

$$\frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{g}}\left(1+\frac{1}{24}\,h^2\,E^2-\frac{1}{36}\,h^4\,E^4\text{ etc.}\right)$$

Nel vuoto il tempo dell' oscillazione sarebbe stato $\frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$ (240).

Adunque la resistenza del mezzo ritarda alquanto l' oscillazione. Ben si vede che per poco che h ed E siano piccole frazioni, questo ritardo del pendolo oscillante nel mezzo sopra di quello che oscilla nel vuoto rendesi presso che insensibile, e sempre più lo diviene a misura che stringendosi le oscillazioni va decrescendo l' arco della discesa.

258. *Coroll. II.* A più forte ragione è insensibile il divario del tempo da un oscillazione all' altra. Infatti nella seconda oscillazione il tempo è

$$\frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{g}}\left(1+\frac{1}{24}\,h^2\,F^2-\frac{1}{36}\,h^4\,F^4\text{ etc.}\right)$$

o sia $\frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{g}}\left(1+\frac{1}{24}h^2E^2-\frac{1}{12}h^3E^3+\text{etc.}\right)$ così che la seconda oscillazione è più breve della prima del tempo $\frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{g}}\cdot\frac{h^3E^3}{18}-\text{etc.}$ divario che nella nostra ipotesi è disprezzabile.

Pertanto quantunque ne' mezzi resistenti secondo il quadrato della velocità la cicloide non sia rigorosamente tautocrona, e le oscillazioni si vadano affrettando a misura che si restringono, pure quando gli archi sian piccoli e piccola la resistenza, si può trascurare il divario.

259. *Scolio*. Tutto ciò che s'è detto de' pendoli cicloidali si può trasferire ai circolari nell'adottato supposto che la corsa del pendolo sia limitata ad archi di piccola ampiezza. Adunque anche in questi pendoli la resistenza dell'aria va sensibilmente stringendo le oscillazioni, senza turbarne sensibilmente l'isocronismo.

CAP. XII.

Del moto d'un sistema.

260. Vedute le leggi del moto d'un punto o sia d'un atomo materiale, consideriamo ora un sistema di punti così tra

loro connessi che in grazia di questa connessione non possano prendere que' movimenti che loro imprimono le forze applicate, ma siano costretti a moversi d' altra guisa. Quest' argomento c' involgerebbe in troppe difficoltà se occorresse trattarlo estesamente: ma pel nostro intento basterà accennare il principio generale che guida alla soluzione de' problemi di questo genere, ed applicarlo ad alcuni casi di non difficile sviluppo.

261. *Proposizione*. Sia un sistema di punti i quali per le forze applicate dovessero concepire le velocità A, B, C etc. ma in grazia della scambievole connessione prendano in vece le velocità a, b, c etc. La velocità impressa A si risolva nell' attuale a, ed in un altra α; similmente la velocità B si risolva nelle due b, β; e la velocità C nelle due c, γ etc. Dico che le forze corrispondenti alle velocità α, β, γ etc. si fanno equilibrio fra loro.

Infatti poichè le velocità α, β, γ etc. non hanno effetto, è d' uopo che le forze corrispondenti s' elidano e s'annullino scambievolmente.

262. *Scolio*. Egli è questo il principio che Dalembert con tanta lode introdusse nella Dinamica, traendone un metodo generale per la soluzione de' più astrusi problemi. Questo metodo consiste nel sostituire alle

forze impresse al sistema due classi di forze equivalenti. Quelle della prima classe sono atte ad imprimer tai moti che ciascun punto possa seguire liberamente senza fare intoppo agli altri o soffrirne: quelle della seconda per lo contrario son tali che si equilibran tutte fra loro. Le prime ottengono pienamente il loro effetto, e determinano il moto attuale del sistema: le seconde si elidono totalmente, e determinano la pressione che soffre ciascun punto del sistema per l'azion vicendevole delle parti.

CAP. XIII.

Del Momento d'inerzia.

263. *Momento d'inerzia* d'un sistema rispetto d'un asse dicesi la somma de' prodotti che nascono moltiplicando ciaschedun elemento del sistema pel quadrato della sua distanza dall'asse.

264. *Coroll.* Il momento d'inerzia è sempre quantità positiva, e sempre cresce, crescendo la massa del sistema.

265. *Proposizione I.* Sia S il momento d'inerzia d'un sistema rispetto d'un asse che passi pel suo centro di gravità, S' il momento d'inerzia dello stesso sistema rispetto d'un altro asse parallelo al primo, e

distante da esso per l'intervallo k: sia finalmente M la massa del sistema. Sarà

$$S' = S + Mk^2 .$$

Sia GG (Fig. 29) l'asse condotto pel centro di gravità del sistema, CC l'altro asse parallelo al primo. Sia in M un elemento del sistema, del qual elemento chiameremo la massa dM. Per M intendasi condotto un piano perpendicolare agli assi GG, CC; si conducano in esso le rette MG, MC, e si unisca CG, sulla quale cada dal punto M la perpendicolare MP. Sarà

$$S = \Sigma . dM . MG^2 \; ; \; S' = \Sigma . dM . MC^2 .$$

Ora è $MC^2 = MP^2 + CP^2$; ed $MP^2 = MG^2 - GP^2$ e $CP^2 = (GP + CG)^2$. Quindi

$$\Sigma . dM . MC^2 = \Sigma . dM . MG^2$$
$$+ \Sigma . 2dM . CG . GP + \Sigma . dM . CG^2$$

o sia

$$S' = S + 2k\Sigma . dM . GP + Mk^2 .$$

Or si avverta che il prodotto $dM . GP$ esprime il momento dell'elemento dM (49) riferito ad un piano condotto per GG normalmente alla retta CG. Perciò (51) $\Sigma . a M . GP = 0$. Rimane pertanto $S' = S + Mk^2$. Il che etc.

266. *Coroll. I.* Conoscendosi adunque il momento d'inerzia d'un sistema rispetto d'un asse che passa pel centro di gravità, agevolmente si trova lo stesso momento ris-

petto d' un asse qualunque parallelo al primo, e viceversa.

267. *Coroll. II.* Di tutti gli assi paralleli fra loro a' quali si può riferire un sistema, quello che passa pel centro di gravità dà il minimo momento d' inerzia.

268. *Proposizione II.* Trovare il momento d' inerzia d' un dato sistema rispetto d' un asse dato.

Il metodo generale per questa ricerca consiste palesemente nell' esprimere analiticamente per mezzo delle coordinate x, y, z il prodotto dell' elemento pel quadrato della sua distanza dall' asse, quindi integrare per tutta l' estension del sistema. Nel che invece dell' asse dato si potrà prendere un altro qualunque ad esso parallelo, ove ciò serva ad agevolare il calcolo; potendosi poscia per la Proposizion precedente trasferir facilmente il momento trovato da un asse all' altro.

Cercasi talora il momento d' inerzia delle linee e figure geometriche, attribuendo ai loro elementi una massa proporzionale alla loro estensione. Assegneremo ne' seguenti corollarj il momento d' alcune figure più semplici, illustrando così l' accennato metodo con varj esempj.

269. *Coroll. I.* Si cerca il momento d' inerzia d' una retta di lunghezza a rispetto d' un

asse elevato perpendicolarmente alla medesima nella sua estremità.

L'elemento è dx; la sua distanza dall'asse è x. Quindi il momento $= \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$; e compiendo l'integrale col porre $x = a$, viene $\frac{a^3}{3}$, espressione cercata.

In questo esempio, come pure ne' seguenti, chiameremo M la massa del sistema. Quì sarà $M = a$; onde il momento d'inerzia esprimesi ancora così $\frac{1}{3} M a^2$.

Se l'asse fosse elevato sul centro di gravità della retta data, o sia sul suo punto di mezzo, sarebbe il momento d'inerzia $\frac{1}{12} a^3$ o sia $\frac{1}{12} M a^2$.

270. *Coroll. II.* Si cerca il momento d'inerzia della periferia d'un cerchio di raggio a rispetto d'un asse condotto pel centro, e perpendicolare al piano del cerchio.

L'elemento essendo $= ds$, e la sua distanza dall'asse $= a$, sarà il momento $= \int a^2 ds = a^2 s$, e compiendo l'integrale col porre $s = 2\pi a$, viene il momento suddetto $= 2\pi a^3 = M a^2$.

271. *Coroll. III.* Si cerca il momento d'

inerzia d'un cerchio di raggio a rispetto d'un'asse elevato nel centro, e perpendicolare al suo piano.

Sia (Fig. 30) $CR = a$ il raggio del cerchio; se ne prenda una parte $CM = z$ ed intendasi descritto col raggio $CM = z$ il cerchio MM', e col raggio $Cm = z + dz$ il cerchio prossimo mm'. L'area della zona compresa da questi cerchi sarà $2\pi z\,dz$, ed il suo momento d'inerzia (270) sarà $2\pi z^3\,dz$. Quindi integrando s'avrà $\frac{1}{2}\pi z^4$, e compiendo l'integrale col porre $z = a$, verrà il momento d'inerzia del cerchio $= \frac{1}{2}\pi a^4$; o veramente $= \frac{1}{2} M a^2$.

272. *Coroll. IV.* Si cerca il momento d'inerzia d'un parallelepipedo rettangolo, i di cui lati sono a; b, c, prendendo per asse il lato c.

Si prendano i lati a, b, c per assi delle x, y, z, e sarà l'elemento del solido $dx\,dy\,dz$, ed il quadrato di sua distanza dall'asse c sarà $x^2 + y^2$. Il momento d'inerzia sarà dunque $\int (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz$. E qui integrando successivamente per rapporto a ciascuna delle tre variabili x, y, z verrà

$$\frac{1}{3} x^3 y z + \frac{1}{3} x y^3 z;$$

poi compiendo l'integrale col porre $x=a$, $y=b$, $z=c$ verrà $\frac{1}{3}abc(a^2+b^2)$ o sia $\frac{1}{3}M(a^2+b^2)$.

Che se l'asse, sempre parallelo al lato c, passasse pel centro di gravità del parallelepipedo, si avrebbe $\frac{1}{12}M(a^2+b^2)$.

273. *Coroll. V.* Si cerca il momento d'inerzia d'un solido nato dalla rotazion d'una curva, rispetto dell'asse di rotazione.

Sia RAR' la curva che rotando attorno l'asse AC produce il solido; sia $AC=x$, $CR=y$, e prendasi per elemento del solido la falda intercetta tra il cerchio RR' corrispondente all'ascissa x, ed il prossimo corrispondente all'ascissa $x+dx$. Il momento d'inerzia di questa falda è (271) $\frac{1}{2}\pi y^4 dx$; onde quello del solido sarà $=\frac{1}{2}\pi\int y^4 dx$.

274. *Coroll. VI.* Applicando questa formola al cilindro, al cono, alla sfera nascono i valori seguenti del momento d'inerzia

1.° Pel cilindro, essendo a il raggio della base, b la lunghezza

$$S=\frac{1}{2}\pi a^4 b=\frac{1}{2}Ma^2$$

2.° Pel cono, essendo a il raggio della base, b la lunghezza

$$S = \frac{1}{10}\pi a^4 b = \frac{3}{10} M a^2$$

3. Pel segmento sferico, essendo a il raggio, x la saetta

$$S = \pi x^3 \left(\frac{2}{3} a^2 - \frac{1}{2} a x + \frac{1}{10} x^2 \right)$$

4.° Quindi per l'emisfero

$$S = \frac{4}{15}\pi a^4 = \frac{2}{5} M a^2$$

e per l'intero globo

$$S = \frac{8}{15}\pi a^4 = \frac{2}{5} M a^2$$

CAP. XIV.

Moto d'un sistema rigido libero.

275. Intenderemo quel che debba avvenire ad un corpo, o qualunque altro sistema rigido sollecitato da più forze, se prima avremo conosciuto ciò che gli avvenga ove sia investito da una forza sola. E qui convien distinguere due casi, potendo la direzione della forza passare pel centro di gravità del sistema o non passarvi.

276. *Proposizione I.* Se la direzione della

forza passa pel centro di gravità, il corpo ne concepirà un moto progressivo con direzione parallela a quella della forza.

Poichè passando la forza motrice pel centro di gravità, essa potrà risolversi in più forze eguali e parallele, applicate a ciascheduno degli elementi eguali del sistema. Che perciò si moverà non altrimenti che se ognuno de' suoi elementi fosse animato da forze eguali, e parallele: avrà dunque moto progressivo.

277. *Proposizione II.* Nel caso della Proposizion precedente la velocità del corpo sarà eguale alla forza sollecitante divisa per la massa del corpo stesso.

Sia M la massa, F la forza impellente. Risoluta la forza F in tante forze elementari eguali e parallele, quanti sono gli elementi eguali della massa, egli è chiaro che siccome la somma di tutte queste forze elementari dev'essere $= F$, ed il loro numero $= M$, così ciascheduna di esse sarà $= \frac{F}{M}$. Quindi (10) sarà la velocità $u = \frac{F}{M}$.

278. *Proposizione III.* Se la direzione della forza non passa pel centro di gravità, il corpo concepirà simultaneamente due moti: l'uno progressivo come se la forza passasse pel centro di gravità; l'altro rotatorio

attorno del centro di gravità come se questo centro fosse immobile.

Sia MRD (Fig. 31) la sezione del corpo mediante un piano che passi pel suo centro di gravità G, e per la direzione della forza impellente; la qual forza sia AP. A questo piano intendasi eretto in G l'asse perpendicolare GX.

Condotta la GA normale ad AP, e presa $GB = GA$, s'intendano applicate nel punto B le due forze opposte BQ, BS ciascuna eguale alla metà della AP. E la forza AP s'intenda divisa nelle due eguali AK, KP.

Così alla forza AP ponno sostituirsi le quattro forze uguali AK, BQ, KP, BS. Ora la risultante delle due prime AK, BQ passa per G, è parallela ad AP, ed è eguale ad $AK + BQ$ o sia alla AP medesima. Adunque per le due forze AK, BQ il corpo si moverà non altrimenti che se la forza AP passasse pel centro G.

Le altre due forze KP, BS tendono palesemente ad aggirare il corpo attorno l'asse GX nel senso della forza AP, e col momento $KP.GA + BS.GB$. E quì essendo $GB = GA$, e $KP + BS = AP$, questo momento diviene $AP.AG$, che è appunto il momento della forza AP per aggirare il corpo attorno GX. Adunque per le

due forze $K P$, $B S$ il corpo roterà attorno l'asse $G X$ come farebbe per la sola forza $A P$ se quell'asse fosse immobile.

279. *Scolio*. La velocità del moto progressivo è uguale per tutti gli elementi del sistema; ma la velocità di rotazione è maggiore per gli elementi più distanti dall'asse, in proporzione della loro distanza. La velocità di que' punti, la distanza de' quali dall'asse è $= 1$, dicesi *Velocità Angolare*.

Conosciuta la velocità angolare, si conosce la velocità di ciascun punto. Sia la velocità angolare $= z$; la velocità d'un elemento distante dall'asse $G X$ dell'intervallo r sarà $= r z$.

280. *Proposizione IV.* Nel caso della Proposizion precedente, la velocità del moto progressivo è uguale alla forza impellente divisa per la massa del corpo; la velocità angolare di rotazione è uguale al momento della forza diviso pel momento d'inerzia del corpo: riferiti entrambi i momenti all'asse di rotazione $G X$.

Sia la forza movente $= F$; la massa del corpo $= M$; il suo momento d'inerzia $= S$; la distanza $A G = a$; la velocità del moto progressivo $= u$; la velocità angolare $= z$.

Dico che sarà $u = \frac{F}{M}$; $z = \frac{a F}{S}$.

Dim. Il moto progressivo è lo stesso (278) che se la forza F passasse pel centro di gravità. Dunque (277) $u = \frac{F}{M}$.

Il moto rotatorio pure è lo stesso (278) che se la forza F rotasse il corpo attorno l'asse GX. Ciò posto consideriamo un elemento dM situato a distanza r dall'asse GX. Quest'elemento trovavasi da prima in quiete, ora in virtù della forza F ha presa la velocità rz. Quindi si può immaginare che esso da principio fosse dotato delle due opposte velocità $rz, -rz$; delle quali conserva la prima, rimanendo l'altra distrutta dalla forza F. Onde se ogni elemento dM fosse animato della forza $rz\,dM$ per cui tendesse a girare in senso contrario ad AP, il complesso di queste forze elementari dovrebbe fare equilibrio colla forza F (261) e la somma de' loro momenti per aggirare il corpo attorno a GX, dovrebbe essere eguale (98) al momento della forza F.

Ma il momento della forza $rz\,dM$ è $= r^2 z\,dM$; e la somma di questi momenti è $= z\Sigma . r^2\,dM = zS$. D'altra parte il momento della forza F è $=$ [illegible] dunque $zS = aF$; onde $z = \frac{aF}{S}$.

281. *Coroll. I.* La velocità del moto pro-

gressivo sta alla velocità angolare di rotazione come $\frac{F}{M}$ ad $\frac{a\,F}{S}$ o sia come S ad $a\,M$.

Quindi agevolmente si scioglie il seguente Problema. Cercasi in qual punto debba spingersi un corpo dato, affinchè prendendo esso contemporaneamente i due moti progressivo e rotatorio, stia la velocità del primo a quella del secondo in ragion data di $m : n$.

Dovrà essere $m : n :: S : a\,M$; onde $a = \frac{n\,S}{m\,M}$.

Converrà dunque che la direzione della forza impellente sia distante dal centro di gravità dell' intervallo $\frac{n\,S}{m\,M}$.

282. *Coroll. II.* Sulla retta $A\,C$ prolungata al di là di G havvi un tal punto C che per un dato istante sta fermo; poichè quanto s' avanzerebbe pel moto progressivo, altrettanto retrocede pel moto rotatorio. Questo punto chiamasi *Centro di spontanea rotazione*.

Difatti la velocità di ciascun punto del corpo è la risultante delle due velocità progressiva e rotatoria che gli competono. Ora pei punti situati nella retta $A\,G\,B$ le due velocità sono cospiranti od opposte. Sia sulla $A\,B$ un punto posto a distanza r dall' asse; sarà la sua velocità $u \pm r\,z$; valendo il

segno + pei punti che cadono da G verso A, ed il segno — pei punti che cadono da G verso B. Per questi ultimi adunque essendo la velocità $u - rz$, essa diverrà nulla in quel punto ove $r = \frac{u}{z}$ o sia $= \frac{S}{aM}$. Quindi presa $GC = \frac{S}{aM}$, sarà C il centro di spontanea rotazione.

283. *Coroll. III.* Di quì si deduce che il doppio moto onde il corpo è animato può per un istante riguardarsi come un semplice moto rotatorio attorno un asse parallelo all' asse GX, e distante da esso della quantità $\frac{u}{z}$.

E viceversa se il corpo non avesse che un semplice moto rotatorio attorno un asse qualunque, del quale la distanza dal centro di gravità esprimasi per $\frac{u}{z}$, questo moto potrà per un istante riguardarsi come composto di due moti simultanei, l' uno progressivo con velocità u, l' altro rotatorio attorno G con velocità angolare z.

284. *Coroll. IV.* Giova osservare alcune altre particolarità di questi due moti contemporanei che prende un corpo libero spinto da una forza eccentrica. Essi sono indipendenti fra loro, e può farsi cessare

l' uno di essi, sussistendo l' altro interamente. Il che in infiniti modi s' ottiene.

Se mentre il corpo cammina ed insieme ruota spinto dalla forza AP, venga incontrato da una forza eguale ed opposta alla AP, e che passi pel centro di gravità, cesserà il moto progressivo, e seguiterà tuttavia il rotatorio.

Ma per fermare la rotazione, lasciando intatto il moto progressivo, una sola forza non basta. Volendovi adoperar due forze parallele alla AP, è necessario prenderle eguali, dirette in senso contrario l' una all' altra, e tali che la somma de' loro momenti rispetto dell' asse GX sia eguale e contraria al momento $AP.AG$.

285. *Coroll. V.* Rimossa ogni azione straniera il moto progressivo conservasi inalterato; si conserverà pure il moto rotatorio, se avverrà che le forze centrifughe per cui le particelle rotanti tendono a scostarsi dall' asse di rotazione si equilibrino fra loro. Ma quando non s' abbia quest' equilibrio, l' asse GX piega di quà o di là, e il corpo va barcolando. Noi lascieremo alla Meccanica sublime la considerazione di questi complicati movimenti.

286. *Coroll. VI.* Se l' azione della forza F è continua, così il moto progressivo, come il rotatorio sono moti accelerati; la forza

acceleratrice del moto progressivo è $\frac{F}{M}$; la forza acceleratrice angolare del moto rotatorio è $\frac{aF}{S}$; onde questi due moti si determinano per le equazioni

$$\frac{du}{dt} = \frac{F}{M} \quad ; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{aF}{S}.$$

287. *Coroll. VII.* Per ultimo, se più forze investono il corpo, il suo moto istantaneo si compone di tutti i moti progressivi e rotatorj dovuti a ciascheduna delle forze sollecitanti.

CAP. XV.

Moto d'un sistema rigido attorno un asse immobile.

288. PROPOSIZIONE. Se un corpo mobile attorno d'un asse venga sospinto da una forza agente in un piano perpendicolare a quell'asse, esso corpo roterà con velocità angolare eguale al momento della forza diviso pel momento d'inerzia del corpo: riferiti ambo i momenti all'asse immobile.

Sia F la forza; a la distanza della sua direzione dall'asse; S' il momento d'inerzia

del sistema rispetto dell'asse: sarà la velocità angolare $z = \frac{a F}{S'}$.

Si dimostra come all'art. 280.

289. *Scolio*. Se la direzione della forza giacesse in un piano obbliquo all'asse, fa d'uopo risolverla in due, l'una parallela all'asse, l'altra situata in un piano ad esso perpendicolare. Quest'ultima è la sola che spinge il corpo a rotare (94): la prima non produce che uno sforzo contro dell'asse (107) che vien eliso dalla resistenza del medesimo.

290. *Coroll. I.* Se l'asse passa pel centro di gravità del corpo, il momento d'inerzia è minore di quel che sarebbe rispetto di qualunque altro asse parallelo al primo (267). Perciò in pari circostanze il corpo roterà più speditamente attorno di un asse condotto pel centro di gravità, che non attorno di qualsivoglia altro asse parallelo.

291. *Coroll. II.* Se F è una forza acceleratrice, il moto rotatorio sarà accelerato, e regolato dall'equazione $\frac{d z}{d t} = \frac{a F}{S'}$.

292. *Coroll. III.* Per indurre una data velocità di rotazione in un corpo dato, ponno usarsi diverse forze, bastando che sia $a F = z S'$. Ma se queste diverse forze producono una rotazione eguale, non produ-

cono però eguali sforzi contro dell' asse, siccome nel Capo seguente passiamo a vedere.

CAP. XVI.

Del Centro di percossa.

293. *PROPOSIZIONE.* In ogni corpo o sistema rotante attorno d'un asse immobile havvi un punto per cui passa la risultante di tutte le forze elementari che animano le particelle del sistema, qualunque siasi la sua posizione, e qualunque sia la velocità del giro. Questo punto dicesi *Centro di percossa*.

Sia MRD (Fig. 32) la sezione del corpo rotante attorno l'asse CV, fatta mediante un piano normale a quest' asse, e condotto pel centro di gravità G. Sia M la massa del corpo, S' il suo momento d' inerzia rispetto dell' asse CV, z la velocità angolare, e finalmente l' intervallo $CG = k$.

Noi troveremo prima la risultante di tutte le forze elementari delle particelle del corpo; indi cercheremo il suo punto d' applicazione.

Il moto rotatorio attorno l'asse CV può per un istante riguardarsi come composto d'un doppio moto (283) l' uno progressivo con velocità $= kz$, l'altro rotatorio attorno l' asse GX parallelo a CV con velocità angolare $= z$. Ciò posto cerchiamo la risul-

tante delle forze elementari. Quelle relative al moto progressivo essendo tutte eguali a kz, e parallele, formano palesemente la somma Mkz. Di quelle poi relative alla rotazione attorno GX la risultante è zero. Poichè sia un elemento dM posto alla distanza r dall'asse GX; sarà la velocità di rotazione $=rz$, e quindi la forza $=rzdM$, e però la somma di tutte le forze elementari sarà $=z\Sigma.rdM$. Ma per la proprietà del centro di gravità (51) la somma de' prodotti rdM è zero. Dunque la somma delle forze elementari relative alla rotazione attorno GX è zero. In tutto adunque la somma delle forze che animano le particelle del corpo rotante non è che Mkz.

Cerchiamo ora il punto d'applicazione. E questo sarà quel punto Q al quale applicata una forza QS eguale e contraria alla Mkz, essa forza estingua ogni moto, equilibrando pienamente la forza del corpo rotante.

Ora essendo (238) $z=\frac{aF}{S'}$, e perciò $a=\frac{zS'}{F}$, è manifesto che se prenderò $CQ=\frac{zS'}{Mkz}$, o sia $CQ=\frac{S'}{Mk}$, sarà Q il punto cercato. Trovasi dunque il centro di

percossa Q sulla retta CG, e dista dall'asse CV per l'intervallo $\frac{S'}{Mk}$.

294. *Coroll. I.* Tosto si vede che il sito del centro di percossa è sempre lo stesso, qualunque sia la posizione del corpo rotante, e qualunque sia la velocità della rotazione.

295. *Coroll. II.* Questo centro è sempre più lontano dall'asse che non è il centro di gravità.

Poichè (265) S' è necessariamente maggiore di Mk^2; onde $\frac{S'}{Mk} > k$, o sia $CQ > CG$.

296. *Coroll. III.* Fra le proprietà del centro di percossa che scendono spontaneamente dalle cose dette, una singolarmente merita d'esser notata a cagione della sua utilità. E questa è che volendosi o indurre o estinguere nel corpo una data velocità di rotazione, e tra le diverse forze che ponno adoprarvisi (292) volendo sceglier quella che tutta s'impieghi direttamente a quest'effetto senza comunicare veruna spinta all'asse di rotazione, conviene adoprarvi una forza eguale ad Mkz, e far che la sua direzione passi pel centro di percossa.

CAP. XVII.

Del Pendolo composto, e del Centro d' oscillazione.

297. *PENDOLO COMPOSTO* è un corpo o un sistema di forma invariabile che abbandonato alla sola sua gravità oscilla attorno d' un asse orizzontale.

Differisce dal pendolo semplice, nel quale o non si considera massa alcuna, o questa tutta in un sol punto supponesi concentrata.

298. *Proposizione*. Nel pendolo composto havvi un punto in cui se tutta la massa del corpo oscillante si supponesse concentrata, riducendo così il pendolo composto ad un pendolo semplice, le oscillazioni di questo sarebbono isocrone a quelle del pendolo composto. Questo punto dicesi *Centro d' oscillazione*; esso coincide col centro di percossa.

Sia $M\,R\,D$ la sezione del pendolo oscillante per la gravità g attorno l' asse orizzontale $C\,V$, e la retta $C\,G\,Q$ nella quale cadono i centri G, Q declini dalla verticale $C\,T$ coll' angolo $Q\,C\,T = \Phi$. Ritenute altronde tutte le denominazioni precedenti, egli è chiaro che siccome tutto il peso del sistema può considerarsi raccolto nel suo centro di gravità G, sarà la forza che fa rota-

re il sistema $= Mg$, ed il suo momento rispetto dell'asse CV sarà Mgk sin. φ; onde (291) il moto oscillatorio del pendolo composto sarà determinato dall' equazione

$$\frac{dz}{dt} = \frac{Mgk \text{ sin. } \varphi}{S'}.$$

Convertasi ora il pendolo composto in un pendolo semplice, riunendone tutta la massa M nel centro di percossa Q. Allora diverrà $k = CQ$, ed $S' = M.CQ^2$; ed il moto oscillatorio sarà regolato dall' equazione $\frac{dz}{dt} = \frac{Mg \text{ sin. } \Phi . CQ}{M.CQ^2}$, o sia $\frac{dz}{dt} = \frac{g \text{ sin. } \Phi}{CQ}$; o sia, poichè $CQ = \frac{S'}{kM}$, dall' equazione $\frac{dz}{dt} = \frac{Mgk \text{ sin. } \varphi}{S'}$. Ma questa equazione è identica colla precedente. Adunque il moto oscillatorio del pendolo semplice CQ è lo stesso che quello del pendolo composto; onde etc.

299. *Coroll. I.* Di quì si deduce un mezzo facile per trovare meccanicamente il momento d' inerzia d' un corpo comunque irregolare. Facciasi questo corpo oscillar per archi minimi attorno d' un asse orizzontale, e contando le oscillazioni fatte in un determinato tempo, si troverà facilmente il tempo d' ogni mezza oscillazione, e quindi per

la formola dell'art. 244. si conoscerà la lunghezza CQ d'un pendolo semplice isocrono. Poscia l'equazione $S' = kM.CQ$ manifesterà subito il valore di S'.

300. *Coroll. II.* Cercasi ancora il centro d'oscillazione nelle linee e figure geometriche, supponendole gravi, ed omogenee. Chiameremo sempre k la distanza del centro di gravità dall'asse di rotazione, ed L la distanza del centro d'oscillazione dallo stesso asse. Ed avremo

1.° Per una retta di lunghezza $= a$ che oscilli sospesa dall'estremo superiore

$$L = \frac{2}{3}a = k + \frac{1}{6}a$$

2.° Per un parallelepipedo rettangolo di lati a, b, c sospeso da un asse che biseca la base superiore bc, essendo parallelo al lato c

$$L = \frac{1}{6}.\frac{b^2 + 4a^2}{a} = k + \frac{1}{6}.\frac{a^2 + b^2}{a}$$

Il qual valore, se il lato b è strettissimo, coincide con quello che appartiene alla linea retta.

3.° Per una sfera di raggio a

$$L = k + \frac{2}{5}.\frac{a^2}{k}$$

4.° Per un segmento sferico, essendo a il raggio, x la saetta

$$L = k + \frac{x}{k}.\frac{\frac{2}{3}a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{10}x^2}{a - \frac{1}{3}x}$$

Per una lente composta di due segmenti sferici eguali, il valore di L è lo stesso.

301. *Coroll. III.* Ecco una regola utile per trovare il centro d'oscillazione d'un sistema, quando si conoscano i centri di gravità, e i centri d'oscillazione delle singole parti che lo compongono. Siano M', M'', M'''... le masse che formano il sistema; k', k'', k'''... le distanze de' loro centri di gravità dall'asse di rotazione; l', l'', l'''... le distanze de' loro centri d'oscillazione da quell'asse; sarà

$$L = \frac{M' k' l' + M'' k'' l'' + M''' k''' l''' \ldots}{M' k' + M'' k'' + M''' k''' \ldots}$$

Difatti essendo $L = \frac{S^c}{Mk}$ si vede che il momento d'inerzia della prima massa sarà $M' k' l'$, e quello della seconda $M'' k'' l''$ etc.; ed il momento di tutto il sistema non essendo che la somma de' momenti d'inerzia delle sue parti, sarà

$$M' k' l' + M'' k'' l'' + M''' k''' l''' \ldots$$

Altronde per la proprietà del centro di gravità (50) è $Mk = M' k' + M'' k'' + M''' k'''\ldots$ Dunque etc.

CAP. XVIII.

Della Percossa.

302. Siano due corpi che camminando con moto progressivo s' incontrino. E poniamo che i loro centri di gravità camminino per la stessa linea retta perpendicolare al piano tangente de' due corpi nel punto di contatto. Così si avrà il caso della *percossa diretta*, e *centrale*.

Che se la retta descritta dal centro di gravità d' uno de' corpi sia bensì normale al piano tangente, ma non passi pel centro di gravità dell' altro corpo, la percossa sarà tuttavia diretta, ma *eccentrica*.

Se finalmente la direzione del centro di gravità d'uno de' corpi non è normale al piano tangente, dicesi la percossa *obbliqua*. Consideriamo prima la percossa diretta e centrale.

303. *Proposizione*. La massa A animata della velocità V incontri la massa B animata nello stesso senso della velocità minore v. Le due masse dopo l' urto procederanno unite, e la velocità comune sarà

$$V - \frac{B(V-v)}{A+B} \quad \text{ovvero} \quad v + \frac{A(V-v)}{A+B}$$

o finalmente $\dfrac{AV+Bv}{A+B}$.

È palese in primo luogo che le due masse prenderanno per effetto dell'urto un eguale velocità; poichè se la massa A conservasse una velocità maggiore di quella che ha acquistata la massa B, questa impedirebbe tuttavia il moto dell'altra, e sussisterebbe tuttavia l'urto, il quale allora precisamente deve cessare, quando la massa B avendo presa tanta velocità, quanta ne ritiene la massa A, più non le serve d'intoppo.

Sia dunque x questa velocità comune; le forze delle due masse, che prima dell'urto erano (110) AV, Bv diverranno dopo l'urto Ax, Bx. Adunque la massa A perde nell'urto la forza $A(V-x)$ e la massa B perde la forza $B(v-x)$. Queste forze estinte debbono fra loro equilibrarsi (261) onde la loro somma dev'essere $=0$. Quindi l'equazione

$$A(V-x)+B(v-x)=0$$

dalla quale si trae il valore annunciato della x.

Se il corpo urtato B è in quiete, si farà $v=0$, e se viene incontro al corpo A, si farà v negativa.

304. *Coroll. I.* La mutazione delle forze è uguale in entrambi i corpi; quella delle velocità è inversamente proporzionale alla massa.

305. *Coroll. II.* La velocità poi del cen-

tro di gravità comune de' due corpi, e la somma delle loro forze si conserva la stessa e prima e dopo l'urto.

CAP. XIX.

Della percossa de' corpi elastici.

306. *Ipotesi.* V'ha de' corpi che nell'urto si comprimono, e dopo l'urto tendono a ripigliar la forma primiera con forza proporzionale all'urto stesso: per modo che questa forza viene a restituir loro in senso contrario una determinata parte di quella forza, e per conseguenza di quella velocità che avevan nell'urto perduta.

307. Dicesi questa forza *elasticità;* la quale si chiama *perfetta,* se il corpo risale precisamente con tanta forza quanta perdette nell'urto; *imperfetta,* se risale con forza minore. Se v'ha de' corpi che nell'urto non si compriman punto, questi si dicono *duri;* e se compressi non spiegano forza veruna per ripigliar la forma primiera, si dicono *molli*.

308. *Proposizione.* La massa elastica A procedente con velocità V incontri ed urti la massa elastica B animata di velocità v; e sia p il rapporto dell'elasticità alla per-

cossa; vale a dire la frazione p esprima quanta parte della velocità perduta nell' urto riacquisti il corpo in senso contrario. Saranno dopo l'urto le velocità

della massa $A \ldots V-(1+p)\frac{B(V-v)}{A+B}$

della massa $B \ldots v+(1+p)\frac{A(V-v)}{A+B}$

Chiamando tuttavia x la velocità comune a cui per l'effetto dell'urto si ridurrebbero i corpi A, B, avrà il corpo A perduta nell'urto la velocità $V-x$, e B la velocità $v-x$. Adunque dopo l'urto, e la successiva restituzione, la velocità di A sarà (306) $x-p(V-x)$, e la velocità di B sarà $x-p(v-x)$. Ove in luogo della x ponendo il suo valore (303) $\frac{AV+Bv}{A+B}$ risulteranno le velocità quali s'è detto.

309. *Coroll. I.* Quì se facciam $p=0$, ritorniamo al caso de' corpi non elastici, trattato nel Capo precedente: se facciam $p=1$, abbiamo il caso de' corpi perfettamente elastici. Generalmente però qualunque sia p troveremo avverarsi le proprietà enunciate agli articoli 304, 305.

310. *Coroll. II.* Chiamasi *forza viva* d'un corpo il prodotto della sua massa pel quadrato della sua velocità. Calcolando la per-

dita di forza viva che si fa nell' urto trovasi questa

$$(1-p^2)\frac{AB(V-v)^2}{A+B};$$

ond' essa è nulla nell' urto de' corpi perfettamente elastici; massima nell' urto de' corpi non elastici.

311. *Coroll. III.* La differenza delle velocità, o sia la velocità *rispettiva*, la quale era prima dell' urto $V-v$ diviene dopo l'urto $-p(V-v)$; sicchè se i due corpi sono perfettamente elastici, la velocità rispettiva è la stessa e prima e dopo l' urto.

312. *Coroll. IV.* Se le due masse sono eguali, e perfettamente elastiche, si scambiano nell' urto le loro velocità.

313. *Coroll. V.* Un corpo elastico urtando direttamente con velocità V contro d' un ostacolo immobile, risale per la stessa linea, con velocità $=pV$. Poichè allora egli è come se la massa B del corpo urtato fosse infinita, e la sua velocità $v=0$; nel qual caso la velocità della massa urtante A diviene $-pV$.

314. *Coroll. VI.* Facile ed elegante è la soluzione del seguente problema. Sia una serie di masse decrescenti in progressione geometrica, della quale sia q l' esponente. La prima massa con velocità V urti la seconda che trovasi in quiete; e questa colla

velocità che prenderà nell' urto vada similmente ad urtar la terza, e così successivamente. Cercasi la velocità che sarà comunicata alla massa *n*esima.

Applicando la formola dell' art. 308 si troverà che la seconda massa riceve la velocità $V.q.\frac{1+p}{1+q}$; e la terza riceve la velocità $V\left(q.\frac{1+p}{1+q}\right)^2$; ed in simil guisa la velocità della massa *n*esima riesce $V\left(q.\frac{1+p}{1+q}\right)^{n-1}$

CAP. XX.

Della percossa eccentrica.

315. PROPOSIZIONE. La massa A con velocità V vada ad incontrare fuor del centro di gravità la massa B animata dalla velocità v con direzione parallela a quella del corpo A. Cercasi il moto d' ambe le masse dopo l' urto.

Siano (Fig. 31) MOE, MRD le sezioni de' due corpi per un piano condotto pei loro centri di gravità T, G, e per la direzione TA della massa A; questa direzione sia lontana dal centro G della massa

B dell'intervallo $GA = a$. Sia x la velocità che resterà alla massa A dopo l'urto; e poichè l'altra massa B prenderà dopo l'urto due moti (278) l'uno progressivo, l'altro rotatorio attorno GX, sia u la velocità del primo, z la velocità angolare del secondo.

La massa A perde nell'urto la forza $A(V-x)$, e la massa B perde la forza $B(v-u)$. Dovendo dunque (261) le forze perdute equilibrarsi tra loro, sarà la prima equazione

$$A(V-x)+B(v-u)=0.$$

Il corpo B è spinto a rotare dalla forza che il corpo A perdette nell'urto, la qual è $A(V-x)$. Dunque chiamando S il momento d'inerzia del corpo B rispetto dell'asse GX, avremo (280)

$$z=\frac{Aa(V-x)}{S}.$$

Finalmente da quanto fu detto all'art. 303 apparisce che tanta velocità dee rimanere alla massa MOE quanta ne concepiscono que' punti della massa MRD che si trovano sulla linea TA, per la qual linea il corpo MOE prosegue il suo cammino: così che la velocità residua della massa urtante dev'essere tanta quanta è la velocità che prende il punto A della massa urtata. Ma la velocità residua della massa urtante è $=x$; la velocità che prende il punto A (282)

è $= u + az$. Sarà dunque

$$x = u + az.$$

Ed ecco tre equazioni onde scoprire le tre incognite x, u, z.

316. *Coroll. I.* Il problema non sarebbe guari più difficile, se l'una delle due masse, o se entrambe fossero elastiche. Restituendo l'elasticità ai corpi in senso contrario una velocità proporzionale a quella che aveano nell'urto perduta, basterà trovar prima le tre velocità x, u, z quali riuscirebbero senza l'elasticità, e poi sostituir loro rispettivamente

$$x - p(V - x)\,;\; u - p(v - u)\,;\; z + pz.$$

317. *Coroll. II.* Se il corpo urtato è legato ad un asse immobile, esso non può nè avere nè concepire per l'urto alcun moto progressivo. Rimangono dunque due sole incognite x, z; per determinar le quali, riferendo i momenti all'asse di rotazione, si hanno come sopra le due equazioni

$$z = \frac{Aa(V - x)}{S'}\;\;;\;\; x = az.$$

CAP. XXI.

Della percossa obbliqua.

318. PROPOSIZIONE. Urtandosi due masse obbliquamente, si cerca il moto che prenderanno per l'urto.

La velocità di ciascuna delle masse si risolva in due; l'una normale al piano tangente ambe le masse nel punto di contatto, l'altra parallela a quel piano. La prima forma la percossa, e subisce que' cangiamenti che sopra abbiamo insegnato a determinare. La seconda rimane invariata, giacchè per essa i corpi non s'urtano, nè agiscon punto scambievolmente. Pertanto componendo quest'ultima colla prima modificata come richieggon le leggi della percossa diretta, si avranno le velocità, e le direzioni de' due corpi dopo l'urto.

319. *Coroll. I.* Per modo d'esempio proponghiamoci questo problema. Data la velocità e l'angolo d'incidenza d'un globo elastico sopra un piano immobile, trovare la velocità e l'angolo di riflessione.

Sia u la velocità, ed α l'angolo d'incidenza. Decompongo la velocità u in due; l'una normale al piano, che sarà $= u \sin. \alpha$; e questa fa la percossa, in virtù della qua-

le il globo risalirà normalmente (313) con velocità $= p\,u$ sin. α: l'altra parallela al piano, che sarà $= u$ cos. α; e questa rimane invariata.

Componendo ora le due velocità fra loro perpendicolari $p\,u$ sin. α, u cos. α si troverà la velocità di riflessione $= u\sqrt{(\cos.\alpha^2 + p^2 \sin.\alpha^2)}$. E detto β l'angolo di riflessione, sarà

Tang. $\beta = \dfrac{p\,u \sin.\alpha}{u \cos.\alpha}$; o sia Tang. $\beta = p$ Tang. α.

320. *Coroll. II.* Quindi se l'elasticità è perfetta, saranno la velocità e l'angolo di riflessione eguali alla velocità ed all'angolo d'incidenza.

LIBRO TERZO

DELLE FORZE MOVENTI, E RESISTENTI.

CAP. I.

Qualità meccaniche de' corpi.

321. Sin qui nella materia e ne' corpi abbiamo supposte certe proprietà e certe forze, e dappresso queste supposizioni abbiamo ricercate le condizioni dell' equilibrio e le leggi del moto. Rivolgendoci ora ai corpi terrestri che ne circondano, convien vedere quali siano in realtà le qualità loro meccaniche, e quale la misura e l' indole delle forze che gli traggono al moto. Nel che l' osservazione e l' esperienza soltanto ponno esserci scorta; seguendo le quali cominceremo tosto col verificare la supposizione fatta sin da principio dell' impenetrabilità e dell' inerzia della materia corporea.

322. L' impenetrabilità della materia corporea provasi per un induzione così estesa, che ben può dirsi universale. Non veggiamo infatti giammai che un corpo sottentri ad occupare lo spazio occupato prima da un altro corpo, salvo che o cacci quest' ulti-

mo da quello spazio, o s' insinui per entro i suoi pori; i quali pori talvolta coll' occhio nudo, e sempre poi coll' occhio armato in tutti i corpi si scorgono.

323. L' inerzia esige due cose 1.° Che un corpo dalla quiete non prenda a moversi senza l' intervento di qualche forza. 2.° Che posto in moto conservi inalterabilmente la sua velocità e la sua direzione, salvo che sopravvenga alcuna forza a cangiarla. Or la prima è verità evidente: non può un corpo prendere a moversi senza una cagione qual ch' ella sia, altrimenti non vi sarebbe ragione perchè prendesse piuttosto tal moto che un altro: or questa cagione (9) è una forza. La seconda proprietà è manifesta per induzione: non veggiamo giammai alterarsi nè la velocità nè la direzione d' un corpo, a meno che intervenga alcuna di quelle cagioni che sappiamo altronde esser atte ad imprimer moto o a rallentarlo. E veggiamo tanto più lungamente conservarsi il moto impresso, quanto più ci riesce di rimovere queste cause alteratrici.

CAP. II.

Della Gravità.

324. Che la gravità sia forza comune a tutti gli elementi della materia assai si ren-

de palese dall' osservare che ogni corpo ed ogni benche minima particella corporea, quando non sia sostenuta, cade per la verticale. Rimane a provare (53) che questa forza è costante in uno stesso corpo, ed eguale ne' diversi corpi; e resta pure ad assegnarne la misura. Per il che ci convien far vedere che il moto de' gravi cadenti è moto equabilmente accelerato; che il valore della forza acceleratrice è lo stesso qualunque sia il corpo cadente; e conviene in fine determinare questo valore. Ma negli esperimenti di questo genere apportano non lieve imbarazzo le resistenze. Se facciamo cadere i corpi nel vuoto, le discese son troppo rapide per poterle confrontare co' tempi: se gli lasciamo piombare da torri elevate, siccome fecero Riccioli e Grimaldi (*a*), incontriamo la resistenza dell' aria che cresce al crescere della velocità e snatura il moto: se gli facciamo scendere per piani di dolce declivio, come fece Galileo (*b*), alla resistenza dell' aria s' aggiunge quella dell' attrito. E tuttavia le sperienze de' citati fisici corrisposero assai bene all' ipotesi della gravità costante. Ad ogni modo il miglior mezzo d' indagare la natura del moto pro-

(a) *Riccioli Almagestum Tom. I. lib. II. cap.* 21.
(b) *Galileo Opere Tom. III. pag.* 102.

dotto dalla gravità si è quello di sperimentare le oscillazioni d'un pendolo per archi minimi; nel qual genere di moto la resistenza dell'aria non cresce oltre un certo limite, e può farsi agevolmente (258) che essa non alteri in modo sensibile il tempo dell'oscillazione.

325. *Sperienza I.* Le oscillazioni d'un pendolo per minimi archi di cerchio si trovano costantemente tutte isocrone fra loro (*a*); del che è facilissimo l'accertarsi, contando il numero delle oscillazioni fatte sotto eguali intervalli di tempo.

326. *Corollario*. È dunque la gravità una forza acceleratrice costante.

327. *Sperienza II.* In varie palle d'ugual diametro e peso si racchiudano pesi eguali di sostanze comunque diverse. Queste palle si sospendano con fili d'eguale lunghezza, e si facciano oscillare per archi minimi. Si troverà (*b*) che il tempo d'un oscillazione è lo stesso per tutte.

328. *Corollario*. Adunque la gravità è la stessa per corpi comunque diversi. Poichè il tempo d'un oscillazione esprimesi (244)

(a) *Galileo ivi pag.* 56.

(b) *Encylopedie. Art. Pesanteur.*
V. anche Galileo l. c. pag. 49. 50.

per $t = \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{g}}$, onde si trae $g = \frac{\pi^2 a}{t^2}$. Essendo dunque t eguale per qualunque corpo, ancor la forza g dovrà essere per qualunque corpo la stessa.

Ciò si conferma col notissimo esperimento della caduta de' gravi nel vuoto; giacchè da pari altezza cade in egual tempo l'oro e la piuma.

329. *Sperienza III.* Si cerchi e si misuri colla maggior precisione la lunghezza del pendolo che batte i secondi; per la quale lunghezza vuolsi intendere (298) la distanza del punto di sospensione dal centro d'oscillazione. Ciò è stato fatto con impareggiabile diligenza in Parigi prima da Mairan poi da Borda (*a*) e si è trovata questa lunghezza di metri 0,9938.

330. *Coroll. I.* Adunque prendendo il metro per unità degli spazj, ed il minuto secondo per unità de' tempi, avremo $g = 9,8088$. Poichè nella formola $g = \frac{\pi^2 a}{t^2}$ fatto $t = 1$, $a = 0,9938$ riesce appunto $g = 9,8088$.

331. *Coroll. II.* Nel primo $1''$ della discesa libera percorrerà il grave uno spazio

(a) *Mairan Mem. de l'Acad. des Sc.* 1735. *Borda V. Institut Nat. Tom. II. pag.* 79.

(188) $= \frac{1}{2} g$, o sia di metri 4,9044. Il che si è pure trovato direttamente, facendo cadere un grave nel vuoto.

332. *Scolio*. Le sperienze del pendolo siccome porgono il mezzo più semplice e più sicuro di confermare l'ipotesi della gravità uguale e costante, così sono attissime ad avvertirci di qualche eccezione a cui quell' ipotesi soggiace. È facilissima a scoprire ogni più leggera alterazione d'un pendolo, poichè l'affrettamento o il ritardo si accumula in un gran numero d'oscillazioni, e si dà tosto a conoscere. Ora lo stesso pendolo portato in varj luoghi discosti per lungo intervallo si altera in modo assai sensibile. Così si è trovato (*a*) che la gravità è diversa nelle diverse latitudini, e va crescendo dall'equatore ai poli. E' nelle elevazioni grandissime sopra il livello del mare si è riscontrata similmente (*b*) una qualche diminuzione della gravità. Ma da tutte queste anomalie può prescindersi nella Meccanica pratica, la quale non mette a confronto più corpi, se non che in brevi distanze.

(a) *V. Newton Princ Lib. III. Prop* 20.

(b) *Bouguer Fig. de la Terre* 1749. *pag.* 357.

CAP. III.

Dell' Elasticità.

333. L'ELASTICITÀ è manifesta in moltissimi corpi, i quali o compressi, o piegati, o distratti spiegan tosto una forza per cui tendono a ricuperare la forma primiera. Egli è si poco ciò che ne ha mostrato sinora la sperienza sulla misura e sulle varietà di questa forza ne' diversi corpi, che dovremo appagarci d' alcune generali osservazioni.

334. Molti sono d' avviso che non vi sia corpo nè assolutamente privo d' elasticità, nè dotato d' elasticità perfettissima. Egli è forse altrettanto difficile il provar concludentemente quest' asserzione quanto l' escluderla; sfuggendo ai sensi nostri le minime differenze che potrebbono farne giudicare dei gradi estremi dell' elasticità. Certo è che vi son de' corpi ne' quali l' elasticità appena è sensibile; ed altri ne' quali è si grande che può aversi come perfetta.

335. È ancora opinione d' alcuni che ne' corpi quantunque imperfettamente elastici sia l' elasticità proporzionale alla forza comprimente; di modo che il corpo tenda a restituirsi con forza che sia una determinata parte di quella dalla quale venne compres-

so. E noi abbiam seguita quest' ipotesi (306) nel calcolare l' effetto della percossa fra corpi elastici. Ma quantunque generalmente sia vero che un elastico più compresso tenda a restituirsi con maggior forza, non è però ben sicuro che la forza di restituzione sia sempre proporzionale alla forza comprimente.

336. Pei corpi che si comprimono nell' urto, un modo facile di misurare il grado d' elasticità, ed insieme di accertare se sia proporzionale alla forza comprimente, sarebbe lo spingerli direttamente contro un piano immobile con diverse velocità, e misurare la velocità del ribalzo. Se la forza elastica è proporzionale alla forza comprimente, la velocità di riflessione avrà una proporzion costante alla velocità d' incidenza (313) e questa proporzione determinerà il rapporto dell' elasticità alla forza comprimente.

337. Il moto col quale le particelle del corpo elastico si rimettono nella prima situazione è moto accelerato, non già equabilmente, ma per gradi sempre minori; poichè gl' impulsi dell' elasticità vanno scemando (335) a misura che il corpo è meno compresso.

338. La velocità acquistata nel fine di questo moto si conserva, se il corpo è libero; che se fosse trattenuto da un ostaco-

lo, ciascuna particella ne serberà quella parte che dalla mutua coesione e dagli altri impedimenti non è distrutta. Quindi un elastico fermato in un punto, e compresso o piegato, dopo la restituzione potrà non fermarsi quivi, e se la coesione delle sue particelle lo permetta, passerà dallo stato di prima allo stato opposto, tra quali due stati andrà oscillando sin tanto che le resistenze nol fermino. Così una lastra d' acciajo fitta orizzontalmente nel muro, e piegata con forza all' ingiù, tostochè si rilascia, ripiegasi d' altrettanto all' insù, e vibra lungamente a guisa d' un pendolo.

339. Un elastico compresso tende a dilatarsi con egual forza per ogni verso, e si dilata infatti, quando non gli sia impedito dalla coesione che lega le sue particelle. Quindi ove la coesione è nulla, come ne' fluidi elastici, il conato alla dilatazione opera egualmente per ogni parte.

CAP. IV.

Elasticità dell' aria.

340. L'ELASTICITÀ de' fluidi aeriformi è forza di singolare energia, operatrice di maravigliosi effetti, e l' umana industria ne

trae gran profitto volgendola agli usi meccanici. Adunque molto rileva il conoscere e misurar giustamente questa forza in que' fluidi de' quali ci possiamo più utilmente valere. Tali sono l'aria, ed i vapori acquei.

341. L'elasticità de' fluidi si esercita con eguale sforzo per ogni parte (339); quindi la pressione d'un fluido elastico sopra una data base è sempre proporzionale alla base premuta. Immaginiamo una colonna prismatica d'una nota sostanza, per esempio di mercurio, che insista normalmente su questa base, e premendola con tutto il suo peso equilibri lo sforzo del fluido elastico. L'altezza di questa colonna misurerà la forza che fa il fluido contro quella base per la sua elasticità. Giova poi prescegliere il mercurio, affine di paragonar prontamente le elasticità de' diversi fluidi con quella dell'aria libera, la quale, come è noto, misurasi dall'altezza media del barometro, o sia dall'altezza d'una colonna di mercurio di metri 0,76.

342. *Sperienza I.* A scoprire come cresca l'elasticità dell'aria mentre cresce la sua densità, adoprò Mariotte (*a*) un lungo sifone di due rami cilindrici verticali uniti da un corto tubo orizzontale. Erano i rami di

(a) *Mouvement des eaux. Part. II. Disc. II.*

lunghezza ineguale; il più corto chiuso ermeticamente alla cima, il più lungo aperto. Per esso versò nel sifone un po' di mercurio, tanto solo che bastasse ad empiere il tubo orizzontale, e confinar l'aria nel ramo più corto. Ciò fatto andò versando altre ed altre quantità di mercurio, e notando ad ogni ripresa il livello al quale si stabiliva in ambi i rami. Così potè scorgere facilmente con qual proporzione andasse crescendo la densità e l'elasticità dell'aria racchiusa nel corto ramo; poichè la densità dovea crescere in ragione inversa degli spazj ne' quali l'aria si andava successivamente restringendo; l'elasticità poi era misurata dalla differenza di livello del mercurio ne' due rami, aggiuntovi metri 0,76 per il peso dell'atmosfera premente sul ramo più lungo.

343. *Corollario*. Il risultato di molte prove fatte nell'indicata guisa fu questo, che in pari temperatura l'elasticità dell'aria è proporzionale alla sua densità.

344. *Scolio*. Questa proporzionalità che si riscontra nelle mezzane compressioni dell'aria, non si potrebbe con egual sicurezza estendere anche alle massime ed alle minime compressioni: poichè in queste non se n'è fatta la prova; ed altronde può ben variare indefinitamente il peso comprimente, ma non può variare indefinitamente la densità.

345. *Sperienza II.* A scoprire come cresca l' elasticità dell' aria mentre cresce la sua temperatura sono opportunissime le sperienze del Sig. Volta (*a*) sulle dilatazioni dell' aria pel calore. Avendo preso un globo cavo di vetro che terminava in uno stretto tubo cilindrico minutamente graduato, ed avendone diligentemente misurata la capacità, riempillo in parte con olio, rimanendo il resto pien d' aria. Poi turatane la bocca col dito, capovolto lo sommerse in una tina piena d' olio. L' aria racchiusa sorse alla cima, occupando la capacità del globo e la superior parte del tubo; essa oltre la pressione atmosferica sostenea quella dell' olio corrispondente all' altezza del livello della tina sopra l' infimo confine dell' aria. Questa fece egli passare per tutti i gradi di temperatura da quella del ghiaccio sino a quella dell' acqua bollente, il che conseguì collo scaldare a poco a poco l' olio del vaso ambiente. Osservava di grado in grado quanto si dilatasse nel tubo l' aria rinchiusa; e perchè la pressione fosse sempre la medesima, avea l' avvertenza di andar sollevando ad ogni volta il tubo, tanto che l' infimo confine dell' aria rimanesse sempre alla stessa profondità sotto il livello della tina. In

(a) *Ann. di Chimica di Brugnatelli. T. IV.*

tal maniera trovò che sotto la stessa pressione, per ogni grado del termometro di Reaumur di cui la temperatura crescesse, cresceva il volume dell' aria uniformemente di $\frac{1}{215}$ del volume primitivo che avea alla temperatura zero; il che torna ad $\frac{1}{268}$ per ogni grado del termometro centigrado, col quale termometro in appresso misureremo le temperature.

346. *Coroll. I.* Di qui si raccoglie che in pari densita l' elasticità dell' aria presa alla temperatura del ghiaccio si accresce di $\frac{1}{268}$ del suo valore per ogni grado di cui cresca la temperatura.

Poichè nella narrata sperienza, giunti alla temperatura di gradi t, l' elasticità primitiva avrebbe dovuto scemare (343) nel rapporto di $1 + \frac{t}{268}$ ad 1, in grazia della densità diminuita nello stesso rapporto. Ma l' elasticità rimase la stessa. Adunque tanto crebbe per l' aumento di temperatura quanto dovea scemare per lo scemamento della densità, che è quanto dire di $\frac{t}{268}$ del suo valore primitivo.

347. *Coroll. II.* Sia P l'elasticità dell'aria nella densità $= 1$, ed a temperatura di gradi t; p l'elasticità della medesima nella densità $= q$, ed alla temperatura di gradi t. Sarà

$$p = P q \left(1 + \frac{t}{208}\right).$$

348. *Scolio I.* Anche questa Proposizione vuolsi restringere entro que' limiti di temperatura ai quali si stendono le sperienze; vale a dire dalla temperatura del geló a quella dell'acqua bollente. Oltre quei limiti, la variazione dell'elasticità pel calore potrebbe per avventura seguire altra legge.

349. *Scolio II.* Vuolsi ancora intendere dell'aria perfettamente asciutta; l'aria umida e vaporosa non si dilata egualmente, cosicchè ad eguali incrementi di temperatura non corrispondono dilatazioni uguali, ma sempre maggiori. Ond'è a conchiudere che ancor l'elasticità non cresce in proporzione della temperatura, ma in proporzion maggiore. Di che avremo ben tosto una diretta conferma.

CAP. V.

Elasticità de' vapori acquei.

350. Egli è fuor di dubbio che l'elasticità de' vapori dipende dagli stessi elementi

che quella dell'aria; voglio dire dalla densità, e dalla temperatura loro. E se come per l'aria, così pe' vapori avessimo doppia serie di sperienze che c' insegnassero partitamente l' influenza di ciascheduno di questi elementi sulla forza elastica, avremmo allora una certa misura di questa forza. Ma di siffatte sperienze sino ad ora manchiamo, e forse ne ha distolto i fisici certa particolare difficoltà che le accompagna, nata da ciò che la compressione o il freddo condensa in parte il vapore, e ne scema la quantità in un modo troppo difficile a valutarsi con esattezza. Non perciò sono prive d' utilità le sperienze istituite da' Signori Bettancour e Dalton (*a*) sulla forza elastica de' vapori, delle quali esporremo in breve il progresso, e i risultati.

351. *Sperienza I.* L' apparato del Sig. di Bettancour consiste in un tino, o caldaja ch' egli empiè d' acqua per una determinata porzione; poi la chiuse perfettamente, e ne cavò l' aria; indi con un sottoposto bragiere alzò gradatamente la temperatura e dell' acqua, e del vapore che da essa continuamente diffondevasi nel vano della caldaja. Un

(a) *Bettancour Expériences sur la force expansive de la vapeur de l' eau. Paris.* 1790.
Dalton V. Biblioth. Britann. Tom. XX. XXI.

lungo barometro a sifone comunicava coll' interno del tino. A misura che il vapore crescendo in densità e in temperatura acquistava forza, scendeva il livello del mercurio nel ramo vicino del sifone, e s' alzava nell' altro ramo. La differenza di livello misurava l'elasticità del vapore, mentre un termometro tuffato col bulbo nella caldaja, e sporgente fuor d' essa col lungo gambo mostrava la temperatura corrispondente.

352. *Sperienza II.* Le sperienze di Dalton furon fatte più in piccolo. L' apparato era un semplice tubo barometrico a sifone, di cui prima d' introdurvi il mercurio s' inumidivano le pareti interne; poscia introdotto nella solita guisa il mercurio ben purgato d' aria, e raddrizzato il tubo, nel vuoto che rimanea verso la cima si condensava ben tosto l' umidità introdotta, ed una falda sottile d' acqua stendevasi alla superficie del mercurio. Allora si accresceva per gradi la temperatura, versando dell' acqua di mano in mano più calda entro un cannone di vetro o di latta che attorniava tutta la parte superiore del tubo. Al crescere la temperatura s' abbassava il mercurio nel ramo ov'era chiuso il vapore, e quest' abbassamento misurava il grado d' elasticità.

353. *Coroll. I.* Quì sotto noterò i risultati d' entrambe le sperienze. Alle temperature

indicate nella prima colonna contrappongo nella seconda colonna le elasticità osservate da Bettancour, e nella terza quelle osservate da Dalton.

0°	0,000m.	0,005m.
10	0,003	0,009
20	0,011	0,017
30	0,026	0,031
40	0,048	0,053
50	0,079	0,088
60	0,129	0,145
70	0,213	0,228
80	0,336	0,352
90	0,507	0,525
100	0,760	0,760
110	1,144	1,056*
120	1,639	1,427*
130	2,276	1,866*

Giova avvertire che coll'apparato di Dalton la temperatura non si poteva alzare oltre il grado dell'acqua bollente; perciò nell'ultima colonna le elasticità corrispondenti alle temperature maggiori di gradi 100 non furono già osservate, ma bensì calcolate dal supposto che progrediscano colla stessa legge colla quale van procedendo nelle temperature inferiori.

354. *Coroll. II.* Crescendo le temperature

in serie aritmetica, crescono le elasticità a un di presso in progression geometrica; infatti si troverà che i loro logaritmi crescono con differenze presso a poco eguali.

355. *Coroll. II.* Quindi l'espressione dell' elasticità p corrispondente alla temperatura t avrà prossimamente questa forma

$$p = M\,(10)^{kt}$$

ove M, k son due coefficienti costanti da determinarsi per l'esperienza. Il primo si determina tosto osservando che alla temperatura $t = 100$, corrisponde l'elasticità $p = 0,76$. Con ciò la formola diviene

$$p = 0,76\,(10)^{k\,(t-100)}$$

Poi per determinare l'altro coefficiente k, sia p' l'elasticità alla temperatura $t+1$. Sarà

$$p' = 0,76\,(10)^{k\,(t-99)}$$

onde si trae $\frac{p'}{p} = (10)^k$, e pigliando i logaritmi tabulari, $k = \log. p' - \log. p$. È dunque il coefficiente k eguale alla differenza costante fra i logaritmi delle elasticità corrispondenti alle temperature ascendenti di grado in grado. Il valor medio di questa differenza nelle riferite sperienze è $= 0,018$. Quindi la formola diviene

$$p = 0,76\,(10)^{0,018\,(t-100)}$$

comodissima al calcolo; poichè basta ag-

giungere al logaritmo di 0,76 il numero 0,018 $(t-100)$ per avere il logaritmo di p.

356. *Coroll. IV.* Pur questa formola non è del tutto accurata, perchè veramente le forze elastiche crescon meno di quel che porti la progression geometrica, e le differenze de' logaritmi non sono in realtà costanti, ma vanno lentamente scemando all' alzarsi della temperatura. Quindi facendo per brevità $t-100=i$, l' espressione dell' elasticità avrà piuttosto la forma

$$p=0,76\,(10)^{k\,i-m\,i^2+n\,i^3-\text{etc.}}$$

e si dovranno determinare i coefficienti k, m, n, etc. in guisa da soddisfare ai risultati delle sperienze.

357. *Coroll. V.* Alle sperienze di Bettancour trovo che si soddisfa assai bene coi coefficienti

$$k=0,01692822 \quad ; \quad m=0,0000379726$$
$$n=0,0000000277143$$

Gli altri coefficienti ponno trascurarsi.

Così aggiungendo al logaritmo di 0,76 il numero $k\,i-m\,i^2+n\,i^3$ si avrà il logaritmo dell' elasticità alla temperatura di gradi i sopra 100. Per le temperature più basse di 100 si farà i negativo.

358. *Coroll. VI.* Alle sperienze di Dalton si soddisfa egualmente (a) coi due coefficienti

(a) *Laplace Mecanique Celeste. Tom. IV. pag.* 272.

$k = 0,0154547$; $m = 0,0000625826$;
gli altri ponno trascurarsi.

359. *Scolio I.* Ma qual giudicio porterem noi sulla discrepanza de' risultati? Il progresso dell' elasticità al crescere della temperatura apparisce più rapido nelle sperienze di Bettancour, più lento e più regolare in quelle di Dalton. Su questa diversità altri hanno conghietturato diversamente. A me par certo che dipendendo la forza elastica congiuntamente dalla temperatura e dalla densità del vapore, non possano ad eguali variazioni di temperatura corrispondere eguali variazioni di forza elastica, se anche la densità non varia egualmente. Ora riflettendo sui diversi apparati delle riferite sperienze, parmi evidente che al crescere della temperatura, la densità del vapore dovesse andar crescendo nelle sperienze di Bettancour, e scemando in quelle di Dalton. Posto ciò, la diversità de' risultati non dee cagionar maraviglia.

Parmi ancora che le sperienze di Bettancour, e perchè fatte più in grande, e per la natura dell' apparato in tutto analogo a quello che si adopra a svolgere il vapore, quando si vuole usarne come d' agente meccanico, possano più sicuramente indicarci la misura della sua forza massimamente nelle alte temperature.

300. *Scolio II.* Crescendo l' elasticità assai più rapidamente che non fa la temperatura, scorgesi che nelle altissime temperature può giungere la forza del vapore a un segno sorprendente, e acquistan fede i prodigiosi effetti che se ne citano.

CAP. VI.

Forza della polvere d' archibugio.

361. La violenta elasticità della polvere d' archibugio accesa in ristretto spazio è quella stessa de' vapori dell' acqua, di quelli dell' acido nitrico, e forse d' altri fluidi aeriformi che nell' accensione della polvere svolgonsi all' improvviso in gran copia. La forza loro dipende soltanto dalla densità, poichè la temperatura è costante; la densità poi varia secondo il rapporto della quantità della polvere allo spazio entro del quale è ristretta. Di quì è nato lo studio di ricercare in qual proporzione s' aumenti l' elasticità del vapor della polvere, crescendo in data proporzione la densità. Riferiremo le più recenti sperienze tentate su questo punto dal Sig. di Rumford (*a*).

362. *Sperienza.* Servì a questa sperienza

(a) *Philosoph. Transact.* 1797. *Part. I.*

un provetto consistente in un cannoncino di ferro di grosse e salde pareti, della capacità interna di millimetri cubi 1472. Ei v'introdusse prima una piccolissima carica di polvere del peso di grammi 0,061; la qual carica riempiva 0,039 dell' interna capacità. L' area della bocca del provetto era millimetri quadrati 31,66; ad essa sovrappose un piano che la turasse esattamente, e questo piano aggravò d'un grosso peso. In questa capacità tutta chiusa accendea la polvere da fuori col calore d'un ferro rovente appressato a una protuberanza che l'interna capacità faceva espressamente. Per tal modo istituì una serie di prove, collo sgravare a poco a poco il piano che chiudea la bocca del provetto, sino a trovare quel peso che dallo scoppio della polvere appena appena venisse smosso. Ciò fatto ripetè la sperienza introducendo nel tubo quantità doppia di polvere, indi tripla, e così in seguito. Così crescendo la densità del vapore in serie aritmetica, egli aveva ad ogni sperienza la corrispondente elasticità misurata da quell' ultimo peso che la forza del vapore avea potuto superare.

363. *Coroll. I.* I risultati delle sperienze furono come qui appresso. La prima colonna mostra il rapporto col quale crescevano le densità; la seconda indica le elasticità cor-

rispondenti espresse nel modo spiegato all' art. 341 : al qual effetto abbiam ridotto ciascun de' pesi osservati al peso d'una colonna di mercurio insistente sulla sezione della bocca del tubo, e prendiamo l'altezza di questa colonna per misura della forza elastica.

Densità	Elasticità
1	59 m.
2	100
3	219
4	290
5	426
6	...
7	617
8	885
9	1179
10	1432
11	1686
12	1956
13	2499
14	3046
15	3589
16	5388
17	....
18	8342

364. *Coroll. II.* L' elasticità non cresce in proporzione della densità, siccome opinò

Robins (*a*) ma in una proporzione di gran lunga maggiore.

La legge di questo accrescimento non è facile a scoprirsi, atteso lo sregolato andamento della serie de' numeri che rappresentano le elasticità: nè mi sembran molto felici i tentativi del Sig. di Rumford per tale oggetto. E altronde i risultati di siffatte sperienze non comportano molta precisione.

365. *Coroll. III.* Falsa parimente è l'opinione dello stesso Robins (*b*) che la massima forza della polvere corrispondente al massimo grado di densità non sia che mille volte maggiore della pressione atmosferica. Quì noi la troviamo assai più forte, e siamo ancora ben lungi dalla densità massima. Non abbiamo sperienze che possano indicarci il sommo grado di questa forza.

366. *Scolio I.* Se nelle scariche de' pezzi d' artiglieria la polvere agisse colla massima energia della quale è capace, non vi sarebbe pezzo sì forte che non si fendesse al primo colpo. Se ciò non avviene, egli è 1.° perchè la palla non tura esattamente la luce del pezzo. 2.° perchè la polvere s' infiamma rapidamente sì, ma non in istante; onde

(a) *V Robins Nouveaux Principes d' Artillerie comm. par Euler. Prop.* 3.

(b) *Ibid. Prop.* 6.

avviene che non sì tosto la porzion di polvere che prima s' accese ha slontanato l'ostacolo, accendendosi il resto in uno spazio meno angusto esercita uno sforzo minore. Di quì si comprende quanto sia difficile il determinare teoricamente la forza onde la palla è cacciata.

367. *Scolio II.* Perciò i mezzi migliori ad avvalorare ove sia d'uopo la forza della carica sono diretti a far sì che l'obice chiuda esattamente la carica, ed al primo scoppio della polvere ceda lentamente, dandole tempo d' accendersi per intero, prima che lo spazio notabilmente s' allarghi. Da ciò dipende l' efficacia della pratica ultimamente introdotta nello spezzare le roccie a forza di polvere; la qual consiste (*a*) nel chiudere il meato della mina con fina sabbia senza punto calcarla.

CAP. VII.

Forza degli agenti animati.

368. TANTI e sì variabili elementi concorrono a modificare la forza degli animali, che ne diviene oltremodo difficile richiamar-

(a) *V. Biblioth. Britann. Tom. XXIII.*

la a certa misura. Cercheremo di trarre dall' osservazione e dalla sperienza quelle più sicure notizie che essa potrà somministrarcene. Ma per ordinare nel miglior modo le nostre ricerche gioverà prima distinguere e ridurre a certi capi le principali cagioni abili ad indur varietà nel valore di codeste forze.

369. Varia in primo luogo la forza non solo nelle diverse specie d'animali, ma anche ne' diversi individui. La qual varietà dipende 1.° Dalla particolar costituzione dell' individuo, e dal complesso delle cagioni che ponno influirvi. 2.° Dalla particolare destrezza acquistata per l' abitudine. Ognun vede non potere questa varietà sottomettersi a veruna legge, nè esservi altro compenso fuorchè quello di cercare de' risultati medj, deducendo da moltiplicate prove la forza degl' individui di mezzana attitudine.

370. Varia in secondo luogo la forza giusta la diversità del lavoro. Diversi muscoli agiscono ne' diversi atteggiamenti dell' animale che fatica; ad alcune azioni è d' ajuto, ad altre d' aggravio il peso stesso della macchina animale: onde non è a stupire che in varj generi di travaglio sia diversa la forza. Così altra è la forza dell' uomo nel portare un peso, altra nel tirarlo o sospingerlo orizzontalmente, altra nel tirarlo o sospingerlo verticalmente. A queste tre ma-

niere d'azione che ora separatamente ora congiuntamente s' esercitano, parmi che si possano ridurre tutte quelle che d'ordinario s'adoprano ne' lavori meccanici.

371. Varia in terzo luogo la forza secondo la diversa durata del lavoro. Altra per esempio è la forza che l'uomo può esercitare in un conato di pochi istanti, altra quella che può mantenere equabilmente con azione continua, o da brevi intervalli interrotta, per una giornata intera di lavoro, senza affaticarsi di soverchio. Chiameremo *forza assoluta* la prima; la seconda *forza permanente*. Giova conoscerle entrambe, venendo spesso in acconcio di prevalersi or dell' una or dell' altra.

372. Varia finalmente la forza secondo la diversa velocità con cui l'animale nell' atto del faticare muove o tutto il corpo, o quella parte che agisce. Massimo è lo sforzo dell' animale quand' egli sta fermo; s' infievolisce allorchè cammina, a misura della sua velocità; essendovi in ultimo tal grado di velocità che lo rende incapace d' ogni sforzo.

373. Parecchi Scrittori (*a*) con molta lode d' ingegno hanno tentato di trarre direttamente dalla considerazione della macchina

(a) *De la Hire Mem. de l' Acad. de Paris* 1699. *Lambert Mem. de l' Acad. de Berlin.* 1776.

animale e della sua disposizione ne' diversi atteggiamenti la misura e le varietà della sua forza. Ma troppi dati ci mancano per giungere a questo scopo. Quindi è convenuto loro assumere altre ed altre ipotesi presso che arbitrarie: onde avvien poi che quand' anche l'ultimo risultato concordi colle sperienze, non si possa conchiuderne nulla di certo in conferma degli assunti principj, o della giustezza della teoria. Pertanto parmi miglior consiglio ricorrere immediatamente alle osservazioni ed alle sperienze per trarne, se fia possibile, la misura della forza degli animali, e le modificazioni che v' inducono le circostanze di sopra notate.

CAP. VIII.

Della forza assoluta dell' uomo.

374. Ad esplorare la forza assoluta dell' uomo in diversi atteggiamenti utilmente s' adopera il dinamometro di Regnier. Consiste questo strumento (a) in una molla ellittica, che si stringe o col premere l'un contro l'altro i due vertici dell' asse minore, o col tirare in senso contrario i due vertici

(a) *Journal. Polytech. Cah. V.*

dell'asse maggiore. Nell'un caso e nell'altro i fianchi della molla s'accostano, e con questo muovono un indice, che percorrendo colla sua punta un semicircolo graduato segna la quantità dell'accostamento.

La divisione del semicircolo è dóppia: la prima pel caso che si comprimano i vertici dell'asse minore l'un contro l'altro; la seconda pel caso che quelli dell'asse maggiore si stirino in parti contrarie.

La prima divisione si fa a questo modo. Si colloca il dinamometro coll'asse minore verticale, ed avendo saldamente fermato il termine inferiore di quest'asse, si comincia a caricare il vertice superiore con pesi crescenti d'un chilogrammo per volta; e i punti ne' quali l'indice successivamente si ferma segnano i gradi corrispondenti a quei pesi. La seconda divisione si compie allo stesso modo collocando il dinamometro coll'asse maggiore verticale, e col vertice di sopra saldamente fermato, indi aggravando il vertice inferiore di pesi crescenti con differenze uguali.

Mediante questa macchinetta si è provata la forza media dell'uomo 1.° nello stringere con una o due mani un corpo. 2.° nel tirare e sollevare un peso verticalmente. 3.° nel tirarlo orizzontalmente. Questi tre esperimenti riuscirono come segue.

375. *Sperienza I* Per esperimentare la forza del pugno, s'impugna il dinamometro verso l'asse minore, e stringendo a tutta possa, l'indice sulla prima graduazione segna il peso equivalente alla forza che si fa nello stringere. Per molte prove è risultato equivalere la misura media di questa forza a chilogrammi 50.

376. *Scolio*. Alcune curiose particolarità furono avvertite nell'atto di questi esperimenti. La più comoda e più vantaggiosa attitudine nello stringere è quella di portare avanti le braccia, chinandole ad angolo semiretto colla verticale. La destra comunemente stringe più forte della sinistra: lo sforzo che fanno ambe insieme eguaglia la somma degli sforzi che fanno separatamente.

377. *Sperienza II.* Per esperimentare la forza dell'uomo nel sollevare un peso verticalmente, si colloca il dinamometro coll'asse maggiore verticale; il vertice inferiore per mezzo d'un uncino si attacca al suolo; al vertice superiore mediante un altro uncino s'attacca un braccetto orizzontale, cui l'uomo prende con ambe le mani e trae all'insù verticalmente quanto può. Allora l'indice nella seconda graduazione segna il peso equivalente alla forza. La media misura di questa forza risultò di chilogrammi 130.

378. *Scolio I.* Qui la posizione più van-

taggiosa si è quella di tenersi col corpo ben diritto, e verticale; soltanto le spalle un pò chine in avanti. E questa posizione è di gran momento, potendo così reggersi un peso di gran lunga maggiore che in qualunque altra attitudine.

379. *Scolio II.* Ancorchè non siasi cimentata col dinamometro nè la forza che fa l'uomo allorquando in vece di tirare verticalmente all'insù, sostiene o solleva il peso col tirare o collo spingere verticalmente all'ingiù, nè quella che esercita nel portare un peso sugli omeri, tuttavia egli par verisimile che la media misura di questi sforzi debba essere bensì alquanto maggiore, ma non di molto, di quella che si è accennata qui sopra. Il maggior peso cui l'uomo di mediocre tempra può reggere per qualche tempo, stando fermo, si reputa infatti comunemente di chilogrammi 150.

380. *Sperienza III.* Per esperimentare la forza dell'uomo nel tirare orizzontalmente, si adopera il dinamometro come nella precedente sperienza, salvo che egli è collocato coll'asse maggiore orizzontale. Nel qual modo essendosi fatte molte prove, n'è risultato che la forza media dell'uomo allorchè trae orizzontalmente in quella attitudine nella quale comunemente si mettono gli uomini che tiran biroccie o battelli, è di chilogrammi 50.

381. *Scolio*. Ne' diversi individui varia moltissimo la forza assoluta sì nell' azione del stringere, come in quella del tirare verticalmente; non è così nel tiro orizzontale; nella quale azione la diversità della forza è circoscritta fra limiti assai ristretti in paragone delle áltre. La forza degli uomini più robusti nel tiro orizzontale non eccede guari chil. 60, superando così di soli 10 chilogrammi la forza media. La ragione di questa rimarchevole differenza può essere che nel tirare orizzontalmente l' uomo s' ajuta più del suo peso che della forza de' muscoli, laddove le altre azioni dipendono totalmente dalla forza muscolare. Ora per quanto diversifichi il peso ne' varj uomini, pur questo divario è senza comparazione minore di quello che nella forza muscolare di diversi individui la natural disposizione e l' esercizio sogliono indurre.

CAP. IX.

Della forza permanente dell' uomo.

382. Procacciarsi nozioni esatte e sicure sulla misura di questa forza non v' è miglior mezzo che l' osservare seguitamente i lunghi lavori de' giornalieri pagati ad ope-

ra, e notare lo sforzo che fanno, la prestezza colla quale camminano, la durata, e gl' interrompimenti della fatica. Le prove che si sono tentate facendo faticar per brev' ora ed appostatamente alcuni operaj, poco o nulla conchiudono. Può facilmente l' uomo sforzare per breve tempo il lavoro, nè lascia mai di farlo allorchè s' avvede ch' egli è osservato e che si vuol far prova della sua forza. Convien dunque abbandonare siffatti tentativi, e dall' osservazione piuttosto che dalla sperienza cercar dei lumi. Eppure appena v' è alcuno che siasi applicato a tali osservazioni, che son pur facili a farsi da chi n' è a portata. Alcune ne ha raccolte con molta cura e sagacità il Sig. Coulomb (*a*). Quì recherenio quelle che a' più comuni lavori meccanici si riferiscono.

333. Ma prima conviene assumere una misura certa e costante a cui riportare la forza della quale si tratta. La forza assoluta esercitandosi dall' uomo mentre sta fermo, ha per sua naturale misura il peso che esso può reggere o smovere: ma la forza permanente esercitandosi dall' uomo mentre cammina, o move parte del corpo, bisogna tener conto non solo del peso trasportato, ma ancora della velocità colla quale si tras-

(a) *Instit. National. Tom. II.*

porta. Desumeremo adunque l'*effetto* della forza permanente dal prodotto del peso per la sua velocità.

Cercandosi poi l'effetto della forza permanente in un intera giornata di lavoro, egli è chiaro che nel paragonare la forza permanente che si esercita in diversi lavori, il tempo del lavoro essendo lo stesso, la velocità è proporzionale allo spazio percorso. Adunque nel far questo paragone potremo ancora prender per misura dell'effetto il prodotto del peso per lo spazio pel quale esso vien trasportato nell'opera intera d'un giorno.

384. *Sperienza I.* Osservato il lavoro di varj facchini incaricati di portar certe robbe a distanza di metri 2000, ciascun d'essi portò nella giornata chilogrammi 348, in sei viaggi, caricandosi di 58 chilogrammi per volta.

Quì l'effetto utile esprimesi col prodotto $348 . 2000 = 696000$.

385. *Scolio.* L'effetto riesce maggiore, allorchè l'uomo caricandosi di minor peso cammina seguitamente senza alternative di scaricare e ricaricare, e senza l'interrompimento de' ritorni a vuoto. Interrogato da Coulomb più d'uno di que' merciaj che viaggiano carichi della lor merce, raccolse dalle loro risposte che col peso di chil. 44

potean camminare 19000 metri per giorno. L' effetto utile ne risulterebbe = 836000. Quantunque abbiasi per esagerata quest' asserzione, siccome sospetta Coulomb, pur non lascia d' apparire in questa maniera d' azione un sensibil vantaggio sopra della precedente.

386. *Sperienza II.* In simil guisa altri facchini portarono in un giorno chil. 4404 di legna per ciascuno, salendo una comoda scala, all' altezza di metri 12. Faceano nella giornata 66 viaggi, e si caricavano di 66,7 chil. ogni volta, e può dirsi 68 pel peso delle corde, e fermagli.

Qui per misurare giustamente l' effetto farebbe d' uopo conoscere precisamente l' inclinazione della scala, dovendosi moltiplicare il peso non già per l' altezza verticale a cui fu levato, ma per lo spazio corso in lunghezza. Altrove suppone Conlomb che l' altezza d' una comoda scala sia un terzo della sua base orizzontale; se questa era tale, fu la lunghezza del cammino di metri 37,95; e l' effetto utile = 68 . 66. 37, 95 = 170320. Ad ogni modo è palese che in quest' azione l' effetto utile è molto minore che ne' trasporti per via piana; cosa ben naturale, atteso il contrasto del proprio peso che convien pur levare insieme colla carica.

Il tempo del lavoro diurno era di sei ore

e mezza, ma molto interrotto; poichè ogni salita dell'uom carico compievasi in minuti 1,1 circa; cosicchè la durata dell' azion faticosa non oltrepassava ore 1 minuti 12 nella giornata, e la velocità della salita era di metri 0,575.

387. *Sperienza III.* Il processo ordinario del battipalo secondo l'osservazione di Coulomb è come segue. Tal numero d' uomini s' adopera comunemente a levare il mazzo, che ciascuno ne solleva chil. 19. Ad ogni strappata si solleva il mazzo metri 1,1. Battono venti colpi per minuto, e dopo tre minuti d'azione riposano per altrettanto tempo, poi ricominciano. Così durando tutta l'opera giornaliera ore sei, la durata dell'azion faticosa non oltrepassa tre ore. Contuttociò è questo assai penoso lavoro, nè comporterebbe durata di molti giorni senza scapito di salute ed esaurimento di forza.

Quì l'effetto utile è = 19.1,1.3600=75240.

388. *Sperienza IV.* Osservati lungamente gli operaj sotto la fatica di girare la manovella, ha rilevato Coulomb che esercitando essi continuatamente uno sforzo equivalente al peso di chil. 7 compiono da venti giri per minuto, essendo la circonferenza del giro metri 2,3. Stanno ott' ore al lavoro, ma pei riposi de' quali di tempo in tempo

abbisognano, il tempo della fatica diurna non eccede ore sei.

Sarà dunque l'effetto utile = 7,2, 3. 7200 = 115920.

389. *Scolio*. Per alcune prove altri (a) hanno trovato in questo genere d' opera un effetto di gran lunga maggiore. Essi contano almeno ott' ore di effettivo lavoro, a 30 giri per minuto, e con uno sforzo continuo di chil. 12,2. L' effetto ne risulterebbe = 404064. Ma abbiamo già avvertito (382) quanto siano ingannevoli cotali prove, e qui ne abbiam la conferma.

390. *Sperienza V.* Ne' trasporti di terra colle carriole, avvegnache il peso della carretta sia per ordinario circa chil. 30 e si carichi di 70 chil. di terra, tuttavia l' operajo non porta che 18 in 20 chilogrammi, posando il resto sul suolo: insieme egli spinge con forza che può stimarsi di 2 in 3 chilogrammi, che tanto in circa gli basta per vincer l' attrito della carretta carica sopra un piano asciutto: sebbene le irregolarità del suolo, e la destrezza dell' operajo rendono questo sforzo ora maggiore, ora minore. Ritorna poscia per altrettanto cammino colla carretta vuota, ed allora non porta più di 5 in 6 chilogrammi, e pochissima

(a) *Desaguliers Cours de Phys. Leç. IV.*

forza gli basta per spinger oltre la carretta. Per tal modo ei può far comodamente 500 viaggi alla giornata di metri 29,226 per ciascuno, ed altrettanti ritorni.

391. *Scolio I.* Questa è azion mista, giacchè l'operajo tien sollevato un peso, ed insieme spinge orizzontalmente. Per misurarne l'effetto, Coulomb moltiplica i 70 chilogrammi di terra pel cammino per cui vengono trasportati, il quale è di metri 14613, onde viene il prodotto 1022910.

Ma questa non è già, a mio credere, la misura adeguata dell'effetto. Chi strascina un peso per un piano orizzontale, non sente già nè vince la forza del peso, ma sì la forza equivalente all'attrito che dee sormontare. In simil guisa a misurar l'effetto della forza dell'operajo ne' metri 14613 ne' quali tra il peso che regge, e la spinta che esercita, fa una forza di circa chilogrammi 22 convien moltiplicare 14613 per 22, e sarà l'effetto 321486. E poichè ne' ritorni percorre altrettanto spazio facendo una forza di circa chil. 5,5, sarà l'effetto di questa parte dell'azione = 14613.5,5 = 80371. Riunendo ora i due effetti, sarà il totale effetto dell'azione giornaliera = 401857.

392. *Scolio II.* Fu opinione del celebre Daniello Bernoulli (a) che l'effetto della

(a) *Prix de l'Acad. Tom. VII.*

forza permanente dell'uomo nel lavoro giornaliero abbia una misura a un di presso costante, e non varj molto nè da un individuo all'altro, nè da un genere di lavoro ad un altro. Egli n'esprime la misura media col numero 274771. Ora le grandissime differenze che abbiam trovate fra gli effetti di diverse azioni smentiscono questa conghiettura, risultando palesemente l'effetto dell'azion giornaliera ora maggiore, or di gran lunga minore della misura assegnatane da Bernoulli.

CAP. X.

Del rapporto tra la forza e la velocità.

393. Sia g il peso equivalente alla forza che l'uomo esercita stando fermo; e sia h quella velocità colla quale camminando ei non è più capace d'alcuno sforzo. Sia poi F il peso equivalente alla forza ch'ei fa, quando cammina equabilmente con velocità v.

Sarà (372) F tal funzione di v. 1.° che scemi al crescer di v. 2.° che quando $v = 0$, venga $F = g$. 3.° che quando $v = h$, venga $F = 0$.

394. Sulla natura di questa funzione invece di sperienze o d'osservazioni che sole

potrebbono insegnarcela, non abbiamo che diverse ipotesi da diversi Scrittori proposte senz'altra raccomandazione che quella della loro semplicità. Son esse le tre che seguono

(a) 1.ª $F = g\left(1 - \frac{v}{h}\right)$,

(b) 2.ª $F = g\left(1 - \frac{v^2}{h^2}\right)$

(c) 3.ª $F = g\left(1 - \frac{v}{h}\right)^2$

395. *Coroll. I.* Misurandosi l'effetto della forza permanente (383) dal prodotto Fv, sarà l'espression dell'effetto una delle tre seguenti, secondo che si adotta o l'una, o l'altra delle ipotesi

1.ª $Fh\left(1 - \frac{F}{g}\right)$ ovvero $gv\left(1 - \frac{v}{h}\right)$

2.ª $Fh\sqrt{\left(1 - \frac{F}{g}\right)}$ ovvero $gv\left(1 - \frac{v^2}{h^2}\right)$

3.ª $Fh\left(1 - \sqrt{\frac{F}{g}}\right)$ ovvero $gv\left(1 - \frac{v}{h}\right)^2$

396. *Coroll. II.* Per conoscere qual sia il peso del quale l'uomo dovrà caricarsi, o la

---

(a) *Bouguer Man. des vaisseaux Liv. I. Sect.* 2.

(b) *Euler Nov. Comm Petr. Tom. III.*

(c) *Euler ibid. Tom. VIII.*

velocità che dovrà prendere affin d'ottenere il massimo effetto, si farà $d.\ F v = 0$. Onde avremo

1.° $F = \frac{1}{2} g$; ed $v = \frac{1}{2} h$

2.° $F = \frac{2}{3} g$; ed $v = \frac{1}{\sqrt{3}} h = 0{,}58\ h$

3.° $F = \frac{4}{9} g$; ed $v = \frac{1}{3} h$

397. *Coroll. III.* Ed il valore del massimo effetto sarà

Nella prima ipotesi $= \frac{1}{4} g h$

Nella seconda ipotesi $= \frac{2}{3\sqrt{3}} g h = 0{,}39\ g h$

Nella terza ipotesi $= \frac{4}{27} g h$

398. *Scolio*. Ma qual delle tre ipotesi dovremo prescegliere? e siam noi certi che alcuna d'esse s'accosti alla vera legge della natura? E quand'anche una fra loro potesse tenersi per vera, come determineremo noi per ciascun genere di lavoro permanente i valori de' coefficienti g, h? Eulero assunse $g =$ chil. 34 ; $h =$ metr. 1,95 ; ma questa è determinazion affatto precaria.

Ridotti sinora a troppo vaghe e malsicure notizie segniamo almeno la traccia che potrà condurci ad acquistarne, quando che

sta, delle più certe. Gioverebbe a tal uopo che in ciascuno de' lavori ne' quali più importa il conoscere la forza dell'uomo, s'istituisse una serie d'osservazioni al modo e colle cautele notate nel Capo precedente, paragonando fra loro quei casi ne' quali gli Operaj sollevano pesi differenti, e notando per ciascun peso il grado di velocità che prendono naturalmente e l'effetto che se ne ottiene. Questa serie ne farebbe scoprire la forma della funzione che esprime la forza per la velocità, e poche sperienze della serie servirebbono a determinare i coefficienti costanti. Sommo utile apporterebbe alla Meccanica una tale scoperta, dalla quale dipende l'impiegare col maggior vantaggio possibile le forze degli agenti animati.

CAP. XI.

Della forza delle bestie.

399. Se poco sappiam di preciso sulla forza dell'uomo, egli è ancor meno quello che abbiamo circa la forza delle bestie da tiro o da soma: il che in tanta facilità di raccoglier su questo punto degli utili lumi, ed in tanta importanza dell'argomento per la direzione de' lavori meccanici, può pare-

re assai strano. Pochissimo sarà pertanto quello che qui potrem dirne.

400. *Sperienza*. Esplorata col dinamometro (38c) la forza assoluta di varj cavalli di mezzana taglia nel tirare orizzontalmente, ne dedusse Regnier il valor medio, che risultò di chil. 350.

401. *Scolio I.* È dunque in questo genere d' azione la forza assoluta del cavallo settupla di quella dell' uomo. Non è già così nel portar pesi; nè potrebbe il cavallo reggere ad un carico sette volte maggiore di quello d' un facchino.

402. *Scolio II.* Circa poi la forza permanente del cavallo nel tiro, crede Sauveur ch' ei possa lavorare ott' ore al giorno, esercitando una forza di chilogrammi 85,66 con velocità di metri 0,97 per secondo: onde l' effetto verrebbe (383) espresso pel numero 2392998. Più verisimile è la stima di Smeaton che riduce quest' effetto a 1716201. E quanto al portar carichi, stimasi che portar possa chil. 97,9 per metri 38980; onde l' effetto sarebbe 3816142. Ma non so quanto possiamo affidarci in queste misure, che sembrano a dir vero eccedenti per un opera continuata a più giorni.

403. *Scolio III.* Vagliono ancor per la forza delle bestie quelle osservazioni che abbiam fatte sulla forza dell' uomo in rap-

porto alla sua velocità, e sul modo di cercarne la precisa ed adeguata misura. E sarebbe a desiderare che l'utilità dell'argomento invogliasse coloro che soprintendono ai grandi lavori meccanici a dirriggere verso questo scopo le loro ricerche.

CAP. XII.

Dell'Attrito.

404. A compiere la trattazione delle forze attive rimarrebbe a parlare di quelle che si traggono dall'urto dell'acqua, o del vento: ma la misura di queste appartiene all'Idraulica. Passando alle forze passive e resistenti, cioè a quelle che non tanto vagliono ad indurre il moto, quanto ad impedirlo, tralascieremo per la stessa ragione di parlare della resistenza de' mezzi fluidi, restringendoci a quelle che provengono dall'attrito, dalla rigidezza delle funi, e dalla tenacità de' solidi.

405. Tre specie d'attrito si distinguono dai meccanici, o piuttosto in tre diverse maniere di moto si considera, e si misura l'attrito. E sono 1.° quello d'un corpo che striscia radendo un piano. 2.° quello d'un cilindro che ruzzola sul piano. 3.° quello

dell' asse d' una ruota, o d' una carrocca; o giri l' asse, o giri il cerchio attorno al medesimo.

406. Gli elementi che ponno influir sull' attrito sono 1.° la pressione di cui il corpo grava la superficie sulla quale cammina. 2.° la scabrosità delle superficie che scambievolmente soffregansi, dipendente dalla diversa loro natura, e preparazione. 3.° la durata del loro scambievole contatto. 4.° l' estensione delle medesime. 5.° la velocità del moto. Sull' influenza di ciascuno di questi elementi la sola sperienza può *illuminarci*.

407. Ma quì pure non possiam troppo fidarci delle prove fatte in piccolo, nelle quali l' operazion dell' attrito può venir mascherata da quella di accidentali ed estranee cagioni che per avventura vi si aggiungano. Ora due celebri sperimentatori Coulomb, e Ximenes (*a*) con lunga serie di sperienze in grande hanno contemporaneamente cercato la misura e le varietà dell' attrito. I loro risultati per lo più concordi spargono molta luce su quest' argomento. Se non che Coulomb avendo maggiormente va-

(a) *Coulomb. Mem. presentées a l'Acad. Tom. X. Ximenes Teoria e pratica delle resistenze de' solidi ne' loro attriti. Pisa* 1782.

riate le sue prove, ha potuto avvertire la notabile influenza di alcuni elementi inosservati a Ximenes, ond' è rimasta nelle sperienze di quest' ultimo qualche irregolarità. Da questi dunque e specialmente dal primo trarremo noi le sperienze dell' attrito, cominciando da quello della prima specie.

Queste sperienze sono di due maniere. Per le prime si misura l' attrito, quando le due superficie posavano ferme l' una sull' altra, e si vuole staccarle dal mutuo contatto. Per le seconde si misura l' attrito, quando l' una superficie scorre sull' altra con velocità qualunque.

403. *Sperienza I.* Il tribometro che per questa sperienza adoprarono Coulomb e Ximenes è sostanzialmente lo stesso. Sopra una lunga tavola orizzontale di legno posa una zattera pur di legno che si aggrava di varj pesi. La zattera vien tratta orizzontalmente da una flessibile funicella, che passando per una girella mobilissima porta appeso un piatto sul quale si vanno aggiungendo de' pesi, finchè si giunga a quello che basta a spostare la zattera, e questo peso è la misura dell' attrito. Si varia a piacere la qualità e l' ampiezza delle superficie soggette al fregamento, coll' inchiodare o sulla tavola, o sotto il fondo della zattera delle lastre di varia natura e grandezza. Or ne' seguenti

Corollarj riferiremo i risultati delle sperienze.

409. *Coroll. I.* In parì circostanze l'attrito è proporzionale alla pressione. Sia la pressione $= Q$, potrà l'attrito esprimersi per fQ, essendo f un coefficiente invariabile nelle diverse pressioni.

Se non che e dagli esperimenti di Coulomb, e meglio da quelli di Ximenes pare che il coefficiente f scemi alcun poco nelle grandi pressioni. Tuttavia la differenza è piccola, e per lo più può trascurarsi con sicurezza.

410. *Coroll. II.* Varia l'attrito secondo la qualità delle superficie. Fra legni nuovi, abbenchè piallati, egli val circa la metà della pressione; fra metalli $\frac{1}{4}$; fra legni e metalli $\frac{1}{5}$.

Quando le superficie son logore per lungo fregamento, l'attrito si fa minore. Così ne' legni dalla metà del peso riducesi ad un terzo. L'attrito fra legni riesce anche molto minore quando le fibre s'incontrano ad angolo retto, per la qual circostanza il fregamento riducesi ad un quarto della pressione.

411. *Coroll. III.* Spalmando le superficie con materia untuosa si ottiene un considerabil vantaggio, e tanto più quanto l'unto ha più consistenza. Così l'unto di sego fresco scema il fregamento circa per metà.

E quand' anche l' unto non si rinovi, finchè resta nelle superficie alcun poco della vecchia untuosità, dura tuttavia il vantaggio, potendo considerarsi l' attrito delle superficie untuose siccome medio fra quello delle superficie asciutte, e quello delle superficie di fresco spalmate.

412. *Coroll. IV.* Varia l' attrito secondo la durata del contatto, e cresce per un certo tempo sinchè giunge al suo valor massimo e costante. Questo tempo è d' un minuto o due ne' legni; brevissimo ed impercettibile ne' metalli; ma ne' legni sovrapposti a metalli dura parecchi giorni. Si prolunga molto coll' ungere le superficie. Generalmente è maggiore quando le superficie sono estese, e quando sono eterogenee.

413. *Scolio I.* Per questa circostanza non avvertita da Ximenes è corsa nelle sue sperienze qualche irregolarità. Non aspettando egli il massimo accrescimento dell' attrito, dovea per lo più riuscirgli minore di quel che trovasse Coulomb. Così fu infatti, e la diversità appunto si palesa maggiore in tutti gli attriti fra legni e metalli, e in que' casi dove interviene untuosità. Allo stesso modo si spiega qualche discrepanza che incontrasi ne' risultati di Ximenes paragonati fra loro: potendo essa nascere dal più

o men tempo del precedente contatto.

414. *Coroll. V.* L' attrito poco o nulla dipende dall' ampiezza delle superficie. Ben è vero che quando la pressione è piccola, e la superficie molto estesa, la resistenza trovasi alquanto maggiore, massime se si frapponga intonaco untuoso: ma quest' aumento molto irregolare ed incostante nasce probabilmente dalla coesione.

415. *Scolio II.* Havvi un altro modo di ricercare il coefficiente f dell' attrito per un dato corpo. E questo consiste nel trovare per esperienza quel più ripido piano su cui quel corpo possa per se medesimo sostenersi. Declini questo piano dalla verticale coll' angolo m; sarà $f = \text{cot. } m$. In fatti il corpo tende a scendere con forza $= g \text{ cos. } m$, e preme il piano con forza $= g \text{ sin. } m$. È dunque l'attrito $= f g \text{ sin. } m$. E poichè esso equilibra la forza che il corpo fa per discendere, sarà

$f g \text{ sin. } m = g \text{ cos. } m$; o sia $f = \text{cot. } m$.

Così essendosi trovato (*a*) che i mattoni si sostengono su d' un piano mediocremente liscio, purchè declini dalla verticale gradi 50', sarà pei mattoni $f = 0{,}8$ circa.

Le terre smosse non si sostengono a piombo, e prendono naturalmente un declivio

(a) *Perronet Mem. de l' Acad.* 1769.

dalla verticale di gr. 60 se sono terre sabbiose e sciolte, di gr. 54 se sono terre forti. Adunque per l'attrito delle terre fra loro il valore di f starà fra 0,58 e 0,73.

416. *Sperienza II.* Per questa sperienza adopra Coulomb lo stesso tribometro: se non che il piatto che porta il peso può scendere per lungo spazio, traendo per altrettanto spazio la zattera. Egli dunque la lascia scorrere tratta dal peso per l'intera lunghezza della tavola; e con un orologio a mezzi secondi confronta il tempo in cui la zattera percorre la prima metà della lunghezza col tempo in cui percorre l'altra metà.

Talora il primo intervallo di tempo riuscì prossimamente doppio del secondo. Allora è facile il dedurne che il moto era uniformemente accelerato, e però l'attrito costante, ed indipendente dalla velocità. Dal paragone degli spazj co' tempi si può calcolare (291, 192) il valore della forza motrice, e quindi ricavare la misura dell'attrito.

Tal altra volta trovò che i tempi erano a un dipresso egnali, ed il moto sensibilmente uniforme. Allora è forza conchiudere che l'attrito crescesse col crescere della velocità. L'attrito poi per quel grado di velocità che ebbe luogo nell'esperimento, si misura dal peso traente.

Or ecco i risultati che per molte prove s' ottennero.

417. *Coroll. I.* L' attrito de' corpi in moto generalmente parlando è minore di quello che convien superare nel primo distacco dell' uno dall' altro. Non è però uguale in tutti il divario. Ne' legni essendo l' attrito del primo distacco la metà della pressione, l' attrito nel moto continuo non n'è più che l' ottava parte. All' incontro ne' metalli non v' ha sensibil divario fra il primo attrito e il secondo. Bensì fra legni e metalli, ne' quali abbiam veduto il primo attrito essere $\frac{1}{5}$ della pressione, il secondo in un moto lento e continuo si riduce ad $\frac{1}{12}$.

418. *Coroll. II.* Ne' legni e molto più ne' metalli l' attrito si mostra costante, ed affatto indipendente dalla velocità. Non così fra legni e metalli: quivi l' attrito col crescere della velocità s' aumenta sensibilmente, quantunque in una proporzione assai minore.

Ben è vero che quando i legni sono logori per continuato fregamento, e specialmente se il carico è grave, e la superficie piccola, la velocità non influisce più tanto sull' attrito.

L' unto di sego fresco altera alcun poco la costanza dell' attrito, e lo fa crescere al

crescere della velocità; ma quì pure per poco che la superficie sia usata, e per così dire incallita al soffregamento, la resistenza torna a un dipresso costante: che però può con sicurezza riguardarsi per tale nell' uso pratico.

CAP. XIII.

Seconda specie d' attrito.

419. SPERIENZA. Sopra due tavolette parallele poste in perfetto piano orizzontale e distanti per qualche spazio si posa un cilindro perpendicolarmente alla loro lunghezza. A questo nell' intervallo delle due tavolette si accavalla un pieghevole spago che porta appesi a' suoi capi due pesi eguali che tengono il cilindro in equilibrio. Allora da una parte si accresce tanto peso quanto si trova bastare per dare e mantenere al cilindro un moto lento e continuo. Questo peso è la misura dell' attrito che il cilindro dee vincere nel ruzzolare sul piano.

Quì può variarsi a piacere il diametro e la materia del cilindro. Volendosi poi variar la pressione, invece d' un solo spago si può accavallarne al cilindro

due o più, acconciamente distribuiti.

E per aver più sicuro riscontro di quel pesetto che rompe l'equilibrio, si fanno ad ogni volta due prove, accrescendolo prima da una parte poi dall'altra; e se il divario è piccolo, si sta al valor medio fra i due osservati. La stessa cautela si adopera ancora nelle sperienze che appresso descriveremo.

420. *Coroll. I.* In pari circostanze l'attrito di seconda specie è prossimamente in ragione inversa del diametro del cerchio o cilindro rotante.

421. *Coroll. II.* Varia ancora quest'attrio secondo le diverse materie che formano il cilindro o il piano. Sembra però che l'untuosità non giovi punto a scemarlo.

Rotando un cilindro di guajaco del raggio di m. 0,081 sopra un piano di rovere, risultò dalle sperienze $f = 0{,}006$; e rotando il medesimo sopra un piano d'olmo, si trovò $f = 0{,}010$. Da che si vede essere l'attrito della seconda specie ben piccolo in paragone della prima.

CAP. XIV.

Terza specie d' attrito.

422. *Esperienza.* Ad una troclea girevole col suo asse entro un cerchio fisso che l' abbraccia si addossa uno spago pieghevole che si carica ne' suoi capi con pesi fra loro eguali, or più or meno grandi, onde variar la pressione. Poi s' accresce da una parte quel peso che si trova bastare per imprimere alla troclea una rotazione lenta e continua.

Per dedurre da questo peso addizionale la misura dell' attrito è da riflettere che il peso agisce sull' estremità del raggio della troclea, laddove la resistenza dell' attrito si esercita sull' estremità del raggio dell' asse, vale a dire nel contatto fra l' asse e il cerchio. Perciò convien ridurre quel peso ad una forza equivalente, che sia direttamente opposta alla resistenza dell' attrito; al qual fine bisogna (97) aumentarlo in ragione del raggio dell' asse al raggio della troclea; e il valore del peso così aumentato dà la misura dell' attrito.

Tenendo poi dietro alla discesa del peso preponderante, e confrontando il tempo della discesa per la prima metà della lun-

ghezza col tempo della discesa per l' altra metà, si riconosce (416) se l' attrito sia costante, o se cresca insieme colla velocità.

Per ultimo è da avvertire che quando vogliasi crescer molto la pressione, invece d' uno spago è forza adoprare una funicella di canape. Allora la resistenza si accresce per conto della rigidezza della fune, e bisogna correggere il risultato, detraendone il valore di questa resistenza estranea. Come ciò si faccia mostreremo nel Capo seguente. Frattanto ecco i risultati delle sperienze di Coulomb.

423. *Coroll. I.* In pari circostanze trovasi l' attrito prossimamente proporzionale alla pressione; dico prossimamente, perchè quì pure, come sopra (409) sotto le grandi pressioni l' attrito s' impiccolisce alcun poco.

424. *Coroll. II.* Varia l' attrito secondo le materie che forman l' asse e il suo cerchio. Essendo l' asse di ferro, e il cerchio di rame, l' attrito è $\frac{1}{7}$ della pressione; ma quando l' asse ed il cerchio sono di legno, si ha minor fregamento, che è circa $\frac{1}{12}$ della pressione.

425. *Coroll. III.* Quì pure si ottiene gran vantaggio dallo spalmare le superficie. L' unto recente di sego scema l' attrito della

metà. Esso poi ricresce a misura che l'untuosità si consuma, ma ciò fa più lentamente che non nell'attrito di prima specie.

426. *Scolio I.* Questo risultato è contraddetto dalle sperienze di Ximenes, che non ebbe sensibil vantaggio dall'ungere gli assi e i cerchi delle girelle. Ma conviene avvertire ch'ei si valse di grossi canapi, senza tener conto della loro rigidezza. Or dalle dimensioni ch'ei ne dà apparisce che questa rigidezza dovea formare una resistenza di gran lunga superiore a quella che proveniva dall'attrito. I suoi risultati offrono in complesso l'effetto delle due resistenze, ma non somministrano i dati richiesti a misurarle separatamente. Nè possiamo trarne alcuna sicura conseguenza sulle varietà dell'attrito, che delle due resistenze è la più piccola.

427. *Coroll. IV.* L'attrito degli assi non dipende punto dalla velocità: almeno essa v'influisce sì poco, che nella pratica può aversi per nulla.

428. *Scolio II.* Scorgesi che l'attrito degli assi è minore di quello della prima specie. Bossut (*a*) ne dà per ragione potersi riguardar questa specie d'attrito siccome mista e partecipe della prima e della seconda. Non so quanto possa valere questa ragione. Nell'

(a) *Bossut Mechan.* §. 308.

attrito di seconda specie il corpo non tocca il piano che in una sola linea, e tosto l'abbandona; ma nell'attrito degli assi del pari che in quello di prima specie, le due superficie strisciano continuamente l'una sull'altra, nè si abbandonano mai, riducendosi tutta la differenza al farsi lo strisciamento in una superficie cilindrica in vece d'una superficie piana. Quel che può render minore l'attrito degli assi a mio parere è piuttosto, che siccome la superficie soffregata è sempre la stessa, e si ricalcano sempre le stesse traccie; così le punte prominenti una volta piegate non deggion più fare quella resistenza che farebbono se si dovessero piegare altra volta: onde nella continuazione del moto par bene che l'attrito deggia risultarne minore, siccome di fatto lo troviamo.

CAP. XV.

Della rigidezza de' canapi.

429. Per ben intendere onde provenga questa resistenza immaginiamo una forza che sollevi un peso traendo una fune adclossata ad una troclea, o ad un cilindro. Se la fune non è perfettamente pieghevole, avviene nel tirarla che rimane per qualche tratto discosta dalla superficie del cilindro, allon-

tanando così il peso dall'asse di rotazione, e facendo crescere il suo momento, cosi che ci vuole per questo conto una forza alquanto maggiore per sollevarlo. Questa forza addizionale vince e misura la resistenza proveniente dalla rigidezza. Essa può variare 1.° secondo la tensione della fune, o sia il peso ond'essa è gravata. 2.° secondo la sua diversa qualità, fabbrica, e preparazione. 3.° secondo la sua grossezza. 4.° secondo il raggio della troclea o cilindro attorno del quale deve piegarsi. Quanto vaglia ciascuno di questi elementi colla scorta della sperienza ricercheremo.

430. *Sperienza*. In due diversi modi sperimentò Coulomb la rigidezza de' canapi, e n'ebbe risultati in tutto concordi. Il modo più semplice è quello stesso che fu descritto all'art. 419, se non che in vece di spago si adopera un canapo più o men grosso. Da quel peso poi che rompendo l'equilibrio imprime e mantiene nel cilindro un moto lento e continuo, convien detrarne quella parte che vince l'attrito di seconda specie; il resto vince e misura la resistenza del canapo.

431. *Coroll. I.* Variandosi il peso che tende la fune, e tutte l'altre circostanze restando pari, la rigidezza della fune per una parte è costante, per l'altra è proporziona-

le alla tensione. Cosicchè può esprimersi per la formola $\mu + \nu Q$, essendo Q il peso tendente.

432. *Coroll. II.* Varia la rigidezza, e quindi variano i coefficienti μ, ν secondo la diversa qualità, fabbrica e preparazione delle funi. Il che abbraccia una diversità presso che infinita, specialmente attesi i molti elementi che concorrono a diversificare la fabbrica delle corde di canape. Generalmente può dirsi che le funi sono più rigide quanto più sono nuove, e più attorte. Le funi impeciate sono più rigide delle bianche.

433. *Coroll. III.* Variando il raggio della fune, o la sua circonferenza, varia la rigidezza non già in proporzione del raggio siccome prima supponevasi, ma in maggior proporzione. Essa è come una potenza k del raggio o della circonferenza, essendo l'esponente k maggior dell'unità, ma diverso nelle varie qualità di fune. Nelle funi nuove, e nelle funi impeciate può assumersi $k = 1,7$; nelle funi molto usate $k = 1,4$.

434. *Coroll. IV.* Variando il raggio della troclea o del cilindro su cui s'avvolge la fune, varia la rigidezza in ragione inversa del raggio.

435. *Coroll. V.* Ecco i valori de' coefficienti μ, ν per due funi l'una bianca, l'altra tinta di pece, della circonferenza di metri

0,0632, ed avviluppate a un cilindro del raggio di metri 0,0541.

Per la fune bianca

$$\mu = \text{chil. } 2,06 \quad ; \quad \nu = 0,090$$

Per la fune impeciata

$$\mu = \text{chil. } 3,23 \quad ; \quad \nu = 0,116$$

Di qui si può prender norma per valutare a un dipresso questa resistenza in ogni altro caso.

436. *Scolio*. Può nascer dubbio se la resistenza proveniente dalla rigidezza delle funi sia costante, oppur se cresca insieme colla velocità. A rimover questo dubbio osservò Coulomb che se nella sperienza dell'art. 422 invece d'un spago ei v'adoprava una fune, la discesa del peso prepondeante era tuttavia equabilmente accelerata, e però la resistenza era costante. Or questa resistenza ha due parti, l'una procedente dall'attrito, l'altra dalla rigidezza del canapo. La prima di queste (427) è costante, dunque lo è ancor la seconda.

CAP. XVI.

Resistenza assoluta de' solidi.

437. Un vincolo tenace stringe fra loro le particelle de' corpi solidi, opponendo gagliarda resistenza alla forza che tenti di

separarle. Ognun vede che questa resistenza dee variare non solo nelle diverse specie di solidi, ma ben anche secondo le varie loro dimensioni, e secondo il vario modo col quale la forza s' applica a tentar la rottura. Se tutti i solidi fossero perfettamente omogenei ed inflessibili, la resistenza d' ogni sezione potrebbe riguardarsi come la risultante di tante forze eguali e parallele quanti sono gli elementi eguali della sezione, onde sarebbe proporzionale all' area della sezione, e raccolta nel di lei centro di gravità. Allora tutte le varietà dipendenti dalle dimensioni del solido, e dal modo di applicazione della forza, potrebbono geometricamente determinarsi. Or quantunque mai non s' incontri questa perfetta ed uguale rigidità delle fibre, pur gioverà di assumerla siccome ipotesi, e vedere dietro la scorta del Galileo (a) quali conseguenze ne derivino. Consulteremo poscia l' esperienza, e il confronto de' risultati ci mostrerà quanto all' eterogeneità delle parti, e quanto all' imperfetta loro elasticità debbasi attribuire.

438. Sia un solido prismatico (Fig. 33) fitto nel muro da una sua estremità, e nell' altra estremità gravato d' un peso che stia per romperlo nella sezione $MRSN$, cosic-

(a) *Galileo Op. Tom. III. pag. 66 e segg.*

chè sia equilibrio tra quel peso, e la resistenza del solido. Prendesi questo peso a misura della resistenza.

Se il peso trae normalmente alla sezione $M\,R\,S\,N$, siccome fa il peso P, tendendo a svellere il solido, dicesi la *resistenza assoluta*: se trae parallelamente alla sezione $M\,R\,S\,N$, siccome fa il peso Q, tendendo a rompere il solido per traverso, dicesi la *resistenza rispettiva*.

439. *Proposizione*. Esprima il coefficiente k la tenacità di ciascun elemento della sezione $M\,R\,S\,N$; e riferita quella sezione all'asse $A\,D$, intorno cui la supporremo simmetrica, sia x l'ascissa, y l'ordinata d'un punto qualunque del suo perimetro. La resistenza assoluta di quella sezione, o sia il peso P che le fa equilibrio, esprimerassi così

$$P = 2k\int y\,dx.$$

Sarà infatti il trapezio elementare $e\,f\,g\,h = 2y\,dx$, e la sua tenacità $= 2k\,y\,dx$. Quindi la risultante (437) o sia la tenacità totale dell'area $M\,R\,S\,N$, cui dev'essere eguale ed opposta la forza P, sarà $= 2k\int y\,dx$.

440. *Coroll. I.* Adunque ne' solidi omogenei la resistenza assoluta è proporzionale alle loro sezioni perpendicolari alla forza distraente.

441. *Sperienza I.* Musschembroek (*a*) cimentò la resistenza assoluta di varj solidi col seguente artificio. Fermatane saldamente l'estremità inferiore, legava l'altra estremità al braccio più corto d'una stadera. Poi nel braccio più lungo andava scostando il marco, e così accresceva gradatamente la forza tendente a sollevar l'altro braccio, ed a schiantare il solido. Notava il segno ov'era giunto il marco al momento della rottura, e da ciò conosceva la forza richiesta a superare la tenacità.

Fece così molte prove specialmente su varie specie di legni, e sopra corde metalliche di diversa natura e grossezza. Altri poscia ne han fatto sulla resistenza d'alcune pietre, e de' cementi. Noi succintamente esporremo i più notabili risultati.

442. *Coroll. I.* Ne' corpi della stessa materia dovrebbono le resistenze variare in proporzione delle sezioni trasversali; or ne' metalli deviarono da questa legge, non però gran fatto, ed ora in un senso, ora in senso opposto. Ne' legni l'aberrazione fu maggiore ed affatto irregolare.

Egli è palese che queste anomalie provengono da difetto d'omogeneità; forse scom-

(a) *Introductio ad cohærentiam corporum firmorum* 1729.

parirebbono, se le sperienze si eseguissero in grande; ma tali prove in grande sono estremamente difficili a motivo delle forze enormi che richieggono.

443. *Coroll. II.* Tra i metalli dopo l'oro il più resistente è il ferro; vengono appresso l'argento e l'ottone, metalli d'uguale tenacità; segue il rame; debolissimi sono lo stagno, ed il piombo. Il rapporto delle tenacità è a un dipresso il seguente

Oro	1110
Ferro	1000
Argento, ed Ottone . .	820
Rame	665
Stagno	110
Piombo	65

Giusta alcune prove del Sig. di Rumford un centimetro quadro di buon ferro lavorato sostiene chilogrammi 4470; di qui si può aver norma per gli altri metalli.

Per simili prove la tenacità di varie specie di macigni apparve di chil. 13,36 per ogni centimetro quadro di superficie; e quella de' mattoni di chil. 18,7. Fu provata anche la resistenza de' cementi, ma questa dev'essere, e si trova infatti assai varia: quindi non è a stupire se riuscì a Coulomb di chil. 3,34 mentre Delanges non la trovò che di chil. 0,67.

444. *Sperienza II.* Con apparato non dissimile dal precedente investigò Duhamel (*a*) la forza richiesta a strappare grosse funi di canape. Era ben da aspettarvi molta varietà, poichè oltre le qualità diverse della canape, tutte le circostanze della fabbricazione influiscono grandemente sulla sua forza. Le osservazioni principali furon queste.

445. *Coroll. I.* Nelle funi dello stesso filo, e fabbricate allo stesso modo, trovasi la forza proporzionale alla sezione, conforme alla teoria.

Ma nelle funi di fabbrica diversa non *si* può prender norma dalle sezioni, poichè la commessura più o meno stretta de' fili, o delle treccie induce molta varietà. Più giustamente si trova la forza proporzionale al peso della fune sotto eguale lunghezza, al quale peso è proporzionale il numero degli elementi che colla loro tenacità contrastano allo strappamento. Ciò deve intendersi, quando la qualità del filo, e il grado dell' attorcimento sia lo stesso in ambe le funi.

446. *Coroll. II.* Per le funi di buon canape, attorte secondo la pratica comune, vale a dire coll' accorciamento d' un terzo, in varie prove la resistenza assoluta riuscì

(a) *Art de la Corderie.*

di chil. 520 per ogni centimetro quadrato di sezione.

Ma questo valore è soggetto a molte varietà. Sopra tutto v' influisce il grado d' attorcimento, il quale quanto è maggiore, tanto più indebolisce la fune. Trova Duhamel che torcendo meno le funi, cosicchè restino scorciate soltanto d' un quarto invece del terzo, la forza s' annienta nel rapporto di 2 : 3. Ha trovato ancora che le funi imbevute di pece son più deboli delle bianche, e le bagnate più deboli delle asciutte.

CAP. XVII.

Resistenza rispettiva de' solidi.

447. PROPOSIZIONE. Ritenute le denominazioni precedenti, sia la lunghezza del solido $AC = c$; la resistenza rispettiva della sezione $MRSN$, o sia il peso Q che le fa equilibrio esprimerassi così

$$Q = \frac{2k}{c} \int xy\,dx.$$

Il peso Q tende a spezzare il solido nella sezione $MRSN$ facendola girare attorno il confine infimo RS, ed agisce col momento Qc. Ora la tenacità del trapezio elementa-

re $e\,f\,g\,h$ la qual è $= 2kyd\,x$ resiste a questo sforzo col momento $= 2kxy\,d\,x$; onde la somma de' momenti per tutta la sezione sarà $= 2k\int xy\,d\,x$. Ma per l'equilibrio questa somma dev'essere uguale (98) al momento del peso. Dunque etc.

448. *Coroll. I.* Abbia il solido la forma d'un parallelepipedo, come soglion esser le travi, e siane l'altezza $A\,D = a$, la larghezza $M\,N = b$, la lunghezza $A\,C = c$. Riuscirà $Q = \frac{a^2\,b\,k}{2c}$; onde le resistenze rispettive de' travi sono in ragion composta delle larghezze, de' quadrati delle altezze, e dell'inversa delle lunghezze.

449. *Coroll. II.* Il rapporto della resistenza assoluta alla rispettiva è il seguente

$$P : Q :: c\int y\,d\,x : \int xy\,d\,x$$

onde nelle travi la resistenza assoluta è alla rispettiva come la lunghezza alla metà dell'altezza.

450. *Coroll. III.* Insieme col peso Q anche il peso proprio del solido tende a spezzar la sezione $M\,R\,S\,N$. Volendosi tener conto di questo peso, che chiamerò V, s'intenda applicato al centro di gravità del solido, o sia alla metà della lunghezza. Agisce dunque col momento $\frac{1}{2}\,Vc$. Quindi l'e-

quazione dell'equilibrio sarà

$$Q + \frac{1}{2} V = \frac{2k}{c} \int x y \, dx.$$

451. *Scolio I.* Abbandonando l'ipotesi Galileana dell'assoluta rigidezza delle fibre, propose Leibnizio (*a*) un altra ipotesi che sembra convenir meglio ai corpi tessuti di fibre flessibili, e capaci d'allungarsi per lo stiramento. Allorchè il peso Q fa forza per girar la sezione attorno il lato infimo $R\,S$, gli elementi contigui a questo lato non soffrono distrazione alcuna, gli altri sono più e più distratti secondo la loro distanza da $R\,S$. La resistenza loro, secondo Leibnizio, è proporzionale alla distrazione che soffrono: onde posta $= k$ la resistenza nel lato superiore $M\,B\,N$, la resistenza nel lato $e\,f$ sarà $= \frac{k\,x}{a}$. Perciò il trapezio elementare $e\,f\,g\,h$ resisterà col momento $\frac{2\,k}{a} \cdot x^2\,y\,dx$. Eguagliando, come prima, la somma de' momenti al momento $Q\,c$ del peso, trovasi in quest'ipotesi

$$Q = \frac{2\,k}{a\,c} \int x^2\,y\,dx.$$

Quindi il rapporto della resistenza assolu-

(a) *Acta Erud. Lips.* 1684.

ta alla rispettiva riesce

$$P : Q :: a\,c \int y\,dx : \int x\,y\,dx$$

cioè nelle travi come la lunghezza ad un terzo dell'altezza.

Sussiste però anche in quest'ipotesi fra le resistenze rispettive di due travi la proporzione assegnata all'art. 448.

452. *Scolio II.* Taluno esprime la resistenza nel lato $e\,f$ semplicemente per $k\,x$, e così trova pei travi parallelipedi $Q = \frac{a^3\,b\,k}{3\,c}$; onde la resistenza loro variarebbe in ragione non più de' quadrati, ma bensì de' cubi delle altezze.

Ma si avverta che esprimendo la resistenza o sia la distrazione in $c\,f$ per $k\,x$, si dovrebbe esprimere la distrazione nel supremo lato $M\,N$ per $k\,a$; onde questa distrazione non avrebbe valor fisso, ma potrebbe crescere con a indefinitamente; il che non può ammettersi. Nello stato prossimo alla rottura egli è palese che la distrazion massima, la quale ha luogo in $M\,N$, deve precisamente essere ugnale a quel maggiore allungamento che comportano le fibre del solido prima di strapparsi. E però la resistenza in ogni punto del lato $M\,N$ non può farsi nè maggior nè minore della resistenza assoluta, o sia della tenacità k.

453. *Scolio III.* Ammessa l' ipotesi Leibniziana, il solido deve incurvarsi alcun poco prima di rompersi. Cerchiamo la curvatura ch' ei prende nello stato prossimo alla frattura, supposta l' inflessione piccolissima.

Sia $ABDC$ (Fig. 34) il profilo del solido, e questo per l' azione del peso Q siasi piegato in $ABdc$. Riferiamo la curva Amc all'asse AC colle coordinate $Ap=z$, $pm=u$, conservando altronde le primiere denominazioni. Sia il punto n prossimo ad m e le sezioni mh, nk concorrano in K. Sarà $Km=R$ il raggio osculatore della curva nel punto m.

Ora consideriamo l' equilibrio del peso Q colla tenacità nella sezione mh, la quale dalla situazione mi parallela ad nk è condotta alla situazione mh per lo stiramento delle fibre. Riferiti i momenti al punto m, è palese che il momento del peso è $Q.Cp$; o sia $Q(c-z)$. Ogni elemento della sezione mh oppone una resistenza proporzionale allo stiramento. Adunque nel punto e sarà la resistenza proporzionale ad eq; e poichè sta $Km:mn::me::eq$, se prendiamo per costante l'elemento mn della curva, sarà eq proporzionale ad $\frac{me}{Km}$ o sia ad $\frac{x}{R}$. Quindi chiamando $\frac{h}{R}$ la resistenza nel punto i,

ove è $x = a$, sarà la resistenza nel punto $e = \frac{hx}{Ra}$.

Perciò la resistenza del trapezio elementare corrispondente al punto e sarà $\frac{hx}{Ra} 2y\,dx$; moltiplicandola per x si avrà la somma de' momenti per tutta la sezione

$$mh = \frac{2h}{Ra} \int x^2 y\,dx.$$

La quantità $\frac{2h}{a} \int x^2 y\,dx$ che è *costante* per tutta la curva $A\,m\,e$, pongasi per brevità $= E$; sarà il total momento della resistenza $= \frac{E}{R}$. Eguagliandolo al momento del peso, avremo l' equazion della curva

$$\frac{E}{R} = Q\,(c - z)$$

onde impariamo che il raggio di curvatura va scemando in proporzione della distanza dal punto estremo C.

Volendosi l' equazione fra le coordinate z, u pongasi per R il suo valore $\frac{ds^3}{dz\,ddu}$, il quale per essere $ds = dz$, diviene $\frac{dz^2}{ddu}$; ed avremo

$$E\,d\,d\,u = Q\,d\,z^{2}\,(c - z)$$

Quest' equazione divisa per dz dà per primo integrale

$$2E\,d\,u = Q\,d\,z\,(2c\,z - z^{2})$$

senza uopo di costante; poichè $z = 0$ rende $\frac{du}{dz} = 0$; come dev' essere.

Integrata nuovamente dà

$$2E\,u = Q\,c\,z^{2} - \frac{1}{3}\,Q\,z^{3}$$

Nè quì pure occorre costante, giacchè $z = 0$ rende $u = 0$.

454. *Sperienza*. Con piccoli prismi di legno affatto simili a quelli de' quali aveva esperimentata la resistenza assoluta, ne esplorò Musschembroek la resistenza rispettiva, stringendo uno de' loro capi con forte staffa di ferro, indi aggravando l' altro capo sintantochè il peso arrivasse a spezzarli. Potè così far paragone delle due resistenze; e variando le dimensioni de' prismi, potè ancora paragonare le resistenze rispettive fra loro. Sottopose a simili prove alcuni cilindretti di vetro.

455. *Coroll. I.* Nel vetro la proporzione della resistenza assoluta alla rispettiva riuscì conforme all' ipotesi Galileana (449); ma ne' legni aberrò stranamente non meno da quell' ipotesi che dall' altra di Leibnizio (451) nè parve potersi ridurre ad alcuna re-

gola certa, tanto ne' diversi legni fu varia.

Ciò non recherà maraviglia a chi osservi che le fibre del legno non sono ne tutte rigide come le suppose Galileo, nè tutte egualmente flessibili come le suppose Leibnizio. Quindi non sì tosto il peso *Q* comincia a forzare il solido che parte delle fibre si strappa, mentre le altre tuttavia resistono; e ne resta diminuita la resistenza della sezione in ragione del numero e della positura delle fibre strappate. Nel che può essere incostanza e varietà grandissima.

450. *Coroll. II.* Quanto al paragone delle resistenze rispettive de' solidi parallepipedi, esse riusciron proporzionali alle larghezze, ed a' quadrati delle altezze, consentendo in ciò colla Teoria. Come variassero nelle diverse lunghezze, non fu esaminato; ma le sperienze che riferiremo nel Capo seguente suppliranno a questa mancanza.

CAP. XVIII.

Resistenza de' solidi sostenuti nelle estremità.

457. *Proposizione.* Intendiamo il medesimo solido (fig. 33) posto sopra due appoggi immobili, che sostengano le sezioni

estreme $M\,R\,S\,N$; $M'\,R'\,S'\,N'$. E dal punto di mezzo E penda il peso T che sia sullo spezzare il solido nella sezione $m\,r\,s\,n$. La resistenza del solido, ossia il peso T che l' equilibra esprimerassi così

$$T = \frac{8\,k}{c}\int x\,y\,d\,x.$$

Ciascheduno degli appoggi sostiene la metà del peso T; perciò sussisterà l' equilibrio, se rimossi i due appoggi intenderemo sostituite ad essi due forze ciascuna eguale alla metà di T, che traendo all' insù tenderanno a rompere il solido nella sezione di mezzo $m\,r\,s\,n$. Il momento di ciascuna di queste forze sarà $\frac{1}{2}\,T.\,\frac{1}{2}\,c$ o sia $\frac{1}{4}\,T\,c$. Questo momento dev' essere eguale al momento della resistenza, che è (447) $2\,k\int x\,y\,d\,x$. Dunque etc.

458. *Coroll. I.* È dunque $T = 4\,Q$; onde un solido sostenuto nelle estremità può portar quadruplo peso di quello che porterebbe quando fosse fitto nel muro da una sola banda; e questo peso quando si tratta di travi, è proporzionale alla larghezza, al quadrato dell' altezza, ed inversamente alla lunghezza.

459. *Coroll. II.* Se il peso T non pendesse dal mezzo, ma da un altro punto, come H,

fatto $AH = z$, ricercando nello stesso modo l'equilibrio del peso colla resistenza della sezione corrispondente al punto H, si troverebbe

$$T = \frac{2ck}{z(c-z)} \int xy\,dx.$$

Quindi tanto maggior peso può portare il trave, quando più il punto di sospensione H si scosta dal mezzo; variando questo peso in ragione inversa del rettangolo $AH.HC$.

460. *Coroll. III.* Se il solido non giace orizzontalmente, si risolverà il peso T in due forze, una perpendicolare alla lunghezza del solido, l'altra secondo essa lunghezza; e si terrà conto soltanto della prima.

461. *Coroll. IV.* Volendosi tener conto anche del peso proprio V del trave, si rifletterà che ognuno degli appoggi ne sostiene la metà; quindi sostituendo agli appoggi un egual forza volta in senso contrario, scorgesi che questo peso agirà contro la sezione di mezzo col momento $\frac{1}{2} Vc$. Ma siccome contrasta a questo sforzo il peso del mezzo trave chiuso fra le sezioni $MRSN$, $mrsn$, il quale può intendersi applicato al punto di mezzo della loro distanza, e però opera con momento $= \frac{1}{8} Vc$; così il momento proveniente dal peso V rimane soltanto $= \frac{1}{8} Vc$.

Ciò posto l' equazione dell' equilibrio dà

$$T + \frac{1}{2} V = \frac{8k}{c} \int x y \, dx$$

Basterà dunque aggiungere al carico T la metà del peso del trave.

462. *Coroll. V.* Qui si presenta un facile problema. Giacciano orizzontalmente due travi d'egual sezione, il primo fitto nel muro da una banda, il secondo sostenuto nelle estremità; e sieno entrambi tanto lunghi quanto posson esserlo onde pel proprio peso non rompano. Cercasi il rapporto delle loro lunghezze.

Mediante le formole degli art. 450, 461 sciogliesi agevolmente, e si troverà che il secondo potrà esser lungo il doppio del primo. E così pur conchiuse Galileo, dalla cui sentenza malamente si scostarono de la Hire, e Grandi (*a*).

463. *Sperienza*. Per gran ventura abbiamo su quest'argomento una bella serie di sperienze del Sig. di Buffon (*b*) su grosse travi di rovere, di sezione quadrata, pesanti chil. 1065 per ogni metro cubo. Queste posate nelle estremità su due saldi appoggi caricava egli a poco a poco nel mezzo, sino a spezzarle

(a) *V. Mariano Fontana Dinamica* §. 328.

(b) *Mem. de l' Acad. de Paris* 1740. 1741.

464. *Coroll. I.* La tavola seguente presenta i risultati medj della sperienza. I pesi cui cedettero le travi sono espressi in chilogrammi; le lunghezze de' travi in metri; i lati della sezione trasversale in decimetri. Al carico adossato alla trave si è aggiunta la metà del peso della trave stessa pel motivo spiegato all'art. 461.

Lunghezze.		Lati della sezion quadrata				
		4 poll. decim. 1,083	5 poll. decim 1,353	6 poll. decim. 1 624	7 poll. decim. 1,894	8 poll. decim. 2,166
Pie.	m.	chil.	chil.	chil.	chil.	chil.
7	=2,274	2614	5664	9307		
8	2,598	2243	4815	7636	12802	
9	2,923	1988	4095	6478	10996	
10	3,248	1789	3520	5553	9595	13663
12	3,898	1487	3011	4509	7991	11576
14	4.548		2637	3721	6559	9793
16	5,197		2180	3186	5484	8144
18	5,847		1868	2804	4722	6607
20	6,497		1642	2515	4173	5785
22	7,146		1525			
24	7.796		1134			
28	9,095		958			

465. *Coroll. II.* Secondo la teoria i pesi *T* dovrebbono seguire la ragion composta della duplicata delle altezze, della semplice

delle larghezze, e dell' inversa delle lunghezze. E perchè qui la sezione è quadrata, dovrebbono quei pesi essere direttamente come i cubi de' lati delle sezioni, e reciprocamente come le lunghezze. Or dalla prima proporzione non aberran gran fatto; più tosto e più costantemente si allontanano dalla seconda, vedendosi che i pesi T scemano più che non porterebbe l' accrescimento delle lunghezze.

466. *Coroll. III.* Una formola assai semplice che rappresenta i risultati della sperienza con approssimazione sufficiente alla pratica, potrebbe essere la seguente

$$T = 6180^{\text{chil.}} \frac{a^3}{c + 0{,}083\, c^3}$$

ritenendo che le lunghezze c si esprimano in metri, e i lati a in decimetri.

Potrebbe rendersi più esatta col cangiarne la forma o col moltiplicarne i termini, ma le irregolarità che si scoprono nella serie de' risultati mi fanno credere che riuscirebbe assai complicata. Altronde è da riflettere che gli sperimenti di questo genere non comportano molta precisione.

467. *Scolio I.* Molte altre particolarità degnissime d' attenzione furono avvertite da Buffon nel corso delle sue sperienze. La brevità ci obbliga ad accennarne due sole. La prima è che variando spesse volte il peso

specifico anche ne' legni della stessa specie, la forza si trova prossimamente proporzionale al peso specifico. La seconda è un osservazione per cui consiglia di non caricare le travi oltre la metà del peso T: poichè un peso alquanto minore di T se non può spezzarle in breve tempo, ben può piegarle notabilmente, e coll' andar del tempo può romperle.

468. *Scolio II.* Reggerebbe la trave ad un carico assai maggiore, se in vece di posar semplicemente su due sostegni, fosse in ambi gli estremi invincibilmente incastrata nel muro. Poichè allora non può rompere, se non si spezza in tre luoghi ad un tempo. Quanto cresca per questo capo la resistenza non è fin ora determinato.

Nelle fabbriche non si ommette d'incastrare per tal modo i capi delle travi. Ma per lo più non è da far gran fondamento sul vantaggio di forza che ne ricevono, attesa la poca resistenza, e il facile deterioramento de' cementi.

CAP. XIX.

Resistenza de' solidi alla compressione.

469. Immaginiamo ora un solido prisma-

tico eretto verticalmente sul suolo, su cui saldamente posi in AB (Fig. 35) e gravato in cima del peso S. Qui se l'omogeneità e la rigidezza delle parti fosse perfetta, l'azion del peso premendo le sezioni del solido l'una contro l'altra ajuterebbe la tenacità anzi che farle contrasto. A spiegar dunque come avvenga di fatto che le colonne sotto gravi pesi s'infrangano, è forza ricorrere a quella flessibilità della quale le fibre de' solidi qual più qual meno partecipano, e richiamare a questo luogo l'ipotesi di Leibnizio. Allora ogni piccol difetto d'omogeneità potrà fare che la colonna cedendo o dall'una parte o dall'altra si curvi conducendosi ad uno stato prossimo alla rottura. Noi cercheremo seguendo le traccie d'Eulero (a) le condizioni di questo stato.

470. *Proposizione*. Posto che per l'azione del peso S la colonna $ABCD$ pieghi d'una quantità piccolissima, curvandosi il lato ApC in AmC, così che faccia nel mezzo il ventre $rs = f$, si cerca la natura della curva AmC nello stato d'equilibrio fra il peso, e la tenacità.

Sia $Cp = z$, $pm = u$, il raggio osculatore in $m = R$. Si cerchi l'equilibrio fra il

(a) *Mem. de l'Acad. de Berlin.* 1757.

peso e la tenacità nella sezione mh come all'art. 453, e il momento della resistenza risulterà, come allora, eguale ad $\frac{E}{R}$. Il momento poi del peso è $= S.pm = Su$. Sarà dunque la cercata equazione $\frac{E}{R} = Su$.

Per averla tra z ed u pongo per R il suo valore $-\frac{ds^3}{dz\,ddu}$; esso è negativo perchè la curva è concava verso l'asse, e si riduce a $-\frac{dz^3}{d\,du}$ perchè a motivo dell'inflessione piccolissima può prendersi $ds = dz$. Ne risulta

$$Su + \frac{E\,d\,du}{dz^2} = 0.$$

Moltiplicando per $2du$, ed integrando col determinar la costante da ciò che posto $u = f$ riesce $\frac{du}{dz} = 0$, si trova

$$dz\sqrt{\frac{S}{E}} = \sqrt{\frac{du}{(f^2 - u^2)}}$$

ed integrando di nuovo

$$z\sqrt{\frac{S}{E}} = \text{Arc. sin.}\ \frac{u}{f}.$$

Nè occorre altra costante, giacchè z ed u spariscono insieme.

471. *Coroll. I.* Abbia la colonna la forma d un parallelepipedo, e sia la lunghezza $AC = c$. $AB = a$, e l' altra dimensione che non è espressa nella figura sia $= b$. Il peso che equilibra la resistenza della colonna è proporzionale ad $\frac{a^2 b}{c}$.

Infatti nell' equazion precedente posto $z = \frac{1}{2} c$ dee venire $u = f$. Quindi

$\frac{1}{2} c \sqrt{\frac{S}{E}} = \text{Arc. sin. } 1 = \frac{1}{2} \pi$, onde $S = \frac{E\pi}{c^2}$.

Ora (453) $E = \frac{2h}{a} \int x^2 y \, dx$; onde nel caso nostro $E = \frac{1}{3} a^2 b h$. Sarà dunque

$S = \frac{a^2 b h \pi^2}{3 c^2}$. Dunque etc.

Se le sezioni delle colonne fossero simili, riuscirebbe S proporzionale ad $\frac{a^3}{c^2}$: E così il peso cui può reggere una colonna cilindrica sarà in ragion composta del cubo del diametro, e dell' inversa del quadrato della lunghezza.

Qui Eulero trova S proporzionale ad $\frac{a^3 b}{c^2}$,

e se le sezioni sono simili, ad $\frac{a^4}{c^2}$. Il che proviene da questo, ch'egli esprime (*a*) la tenacità d'ogni particella nel modo accennato all'art. 452; il qual modo per la ragione ivi esposta non sembra potersi ammettere.

472. *Sperienza*. Appartiene a questo luogo una serie di sperienze istituite da Musschembroek con travicelli di varj legni, e di diverse misure, e con alcuni pilastrini di pietra fitti saldamente in una tavola da cui sorgevano verticali. Poneva in cima a ciascun di questi un piano orizzontale che andava gravando di pesi, sinchè il peso giungesse a spezzare il travicello. Ponea cura che il centro di gravità del sovrapposto peso cadesse sull'asse del travicello diritto, nè cangiasse di luogo nel mentre che questo piegava.

473. *Coroll. I.* I pesi che ruppero i travicelli riuscirono per l'appunto nella ragione di $\frac{a^2 b}{c^2}$; il che consente a maraviglia colla teoria Enleriana modificata così come abbiam fatto nell'articolo precedente.

(a) *V. Nova Acta Petrop. Tom. II. pag.* 131.

474. *Coroll. II.* Soggiungeremo alcuni valori de' pesi per cui ressero diversi parallelepipedi lunghi tre decimetri, e di base quadrata del lato d'un centimetro. Un travicello di rovere portò chilogrammi 131; un pilastrino di mattoni, chil. 76; un pilastrino di macigno, chil. 73; uno di marmo, chilogrammi 203.

LIBRO QUARTO

DELL' EQUILIBRIO DELLE FABBRICHE.

CAP. I.

Nozioni generali.

475. Sorgono verticalmente dal suolo i muri, le colonne, le dighe, ed altre simili moli che forman base alle sovrapposte, o adjacenti parti dell' edificio. Queste basi disegneremo col nome generico di *piediritti*. Le altre parti mentre spingono o premono i piediritti, si spingono ancora e si premono scambievolmente. E se tutte queste azioni si equilibran fra loro, ed insieme colle resistenze provenienti dall' attrito delle superficie, e dalla tenacità de' pezzi solidi e de' cementi, sarà l' edificio *equilibrato*.

476. Ogni fabbrica è un sistema di forze, e l' esame della sua fermezza esige l' applicazione delle condizioni generali d' equilibrio. Ma quest' esame può agevolarsi coll' istituirlo separatamente sopra le diverse parti dell' edificio, purchè possiamo conoscere e valutare le forze che sopra ognuna di esse agiscono. Converrà allora per ciascuna parte

osservare quai moti tendano ad imprimervi le forze applicate, e percorrendo ad uno ad uno questi moti, far paragone tra le forze che tendono ad imprimerli, e quelle che vi resistono.

477. Ora nessuna parte dell' edificio può essere smossa, se non che o per moto progressivo, o per moto rotatorio. Poichè o quella parte è spostata senza cangiare sua forma; ed allora ella è come un sistema di forma invariabile, incapace di concepir moto istantaneo se non è progressivo o rotatorio: oppure viene spostata cangiando insieme sua forma; e questo, atteso il vincolo della tenacità, non può accadere se non collo spezzarsi quella parte nella sezione più debole; il che imprime un moto progressivo se la forza agisce perpendicolarmente alla sezione, ed un moto rotatorio, se essa agisce obbliquamente.

478. Distingueremo col nome di *Spinta* quella forza che tende ad imprimere un dato moto a una data parte della fabbrica; e col nome di *Resistenza* quella forza che tende ad impedirlo. Ora pei moti progressivi si dovrà far paragone fra la *Spinta* e la *Resistenza*; pe' moti rotatorj si dovrà far paragone fra il *Momento della spinta*, ed il *Momento della resistenza*, quali momenti dovranno riferirsi a quell' asse attorno cui

il sistema può rivolgersi. Da questo paragone dipende il giudicio dell' equilibrio e della stabilità.

CAP. II.

Dell' equilibrio de' piediritti.

479. PER non dipartirci dai casi più semplici e più usuali supporremo il piediritto simmetrico attorno d' un piano verticale *A B C D* (Fig. 36) che passi per la direzione della spinta *S R*. Quivi pure cadrà il centro di gravità del piediritto, e siccome nel medesimo piano agiscono tutte le forze, così in luogo di tutto il solido basterà considerarne questo profilo *A B C D*.

Decomposta la spinta in due forze, l' una *P* verticale, l' altra *Q* orizzontale, egli è chiaro che il piediritto non potrà tutto spostarsi se non che o per moto progressivo da *B* verso *A*, o per moto rotatorio attorno l' angolo *A*.

480. *Proposizione*. Trovare la resistenza del piediritto, ed il momento della resistenza.

Al moto progressivo resiste l' attrito. Sia *M* il peso del piediritto; sarà la pressione sulla base $AB = M + P$; e quindi sarà

l'attrito, o sia la cercata resistenza (479) $= f(M + P)$.

Il momento poi della resistenza (478) dee cercarsi relativamente al moto rotatorio. Si cali dal punto G la perpendicolare GX sulla base, e da un punto S preso ad arbitrio sulla direzione della spinta si cali similmente la perpendicolare SE. Sia $AX = k$, $AE = x$, $ES = y$. La spinta orizzontale Q col momento Qy tende a rovesciare il solido attorno l'angolo A. Resiste a questo sforzo il peso M col momento Mk, e la spinta verticale P col momento Px. Sarà dunque il total momento della resistenza $= Mk + Px$.

481. *Coroll. I.* Adunque per la stabilità dovrà essere $fM + fP > Q$; $Mk + Px > Qy$.

Se vi fosse ugnaglianza fra la spinta e la resistenza, e fra i rispettivi momenti, il piediritto reggerebbe tuttavia, ma ad ogni piccolo accrescimento della spinta vacillerebbe.

482. *Coroll. II.* La seconda condizione si può esprimere e riconoscere anche senza risolvere la spinta nelle due forze P, Q. Si cali dal punto A la normale AZ sulla direzione della spinta. Dovrà essere $M . AX > S . AZ$.

Oppure si prolunghi la verticale condotta pel centro G sinchè concorra in I colla di-

rezione della spinta. S' intendano applicate in I le due forze M, S e si compia il parallelogrammo coi lati che le rappresentano. La diagonale prolungata dovrà cader sulla base di quà dal punto A verso B.

483. *Coroll. III.* Sia il piedritto un muro rettangolare e siane l'altezza $BC = a$, la grossezza $AB = b$, il peso specifico $= G$. Sarà $M = a\,b\,G$, e $k = \frac{1}{2}\,b$. Perciò se il muro sostenga soltanto una spinta orizzontale Q, sarà la resistenza $= a\,b\,f\,G$; ed il momento della resistenza $= \frac{1}{2}\,a\,b^2\,G$.

Quindi ingrossando un muro rettangolare, la sua resistenza contro una spinta orizzontale s' accresce in ragione della grossezza, e il momento della resistenza in ragion duplicata della grossezza.

484. *Coroll. IV.* Dichiariamo coll' esempio l' applicazione di questa teoria alla pratica. Un muro alto metri 12, e del peso specifico 2000 deve reggere ad una spinta orizzontale di chilogrammi 4500 che si esercita verso la sommità. Cercasi la grossezza che gli conviene per l' equilibrio.

Qui fa d' uopo avvertire 1.° che prendendo il metro per unità delle misure lineari, il peso specifico 2000 denota che un metro cubo del materiale ond' è composto il muro

peso chil. 2000; e così il prodotto abG indicherà il peso del muro sulla lunghezza d'un metro. 2.° che similmente dicendosi che la spinta orizzontale vale chil. 4500, vuolsi intendere la spinta esercitata sull'unità di lunghezza, vale a dire sulla lunghezza d'un metro. 3.° che il coefficiente f dell'attrito può farsi (415) $= 0,8$; noi però a sicurezza maggiore faremo solamente $f = 0,75$.

Ora le due equazioni dell'equilibrio qui sono

$$abfG = Q \quad ; \quad \frac{1}{2}b^2G = Qy$$

ove introdotti i valori numerici avremo dalla prima $b = 0,25$; e dalla seconda $b = 2,12$.

Basterebbe dunque al muro la grossezza di 25 centimetri per non essere spostato orizzontalmente; ma perchè non rovesci al di fuori esige per lo meno grossezza di metri 2,12.

Questa grossezza 2,12 richiesta pel puro equilibrio non parrà sufficiente (481) ad assicurare la stabilità. Dee però riflettersi che non avendo noi messa in conto la tenacità che lega il muro alla base, abbiam fatto la sua resistenza minore di quella che è realmente: onde coll'assegnata grossezza di 2,12 potrà benissimo sostenere una spinta superiore ai chil. 4500. Pur gioverà crescerne alquanto la grossezza ad abbondante cautela.

485. *Scolio*. Sin quì abbiam considerato il piediritto come un solido di forma invariabile, da non potere spostarsi che tutto d' un pezzo. Siccome però la spinta potrebbe romperlo in alcuna delle sue sezioni, così converrà esaminare la sua fermezza anche sotto questo rapporto. Il che ci basterà d' accennare, avendo già dato il modo di valutare la resistenza che proviene dalla tenacità.

La spinta verticale P tende a schiacciare il piediritto. Converrà paragonarla colla di lui resistenza alla compressione che si misura come al Cap. XIX. del Libro precedente.

La spinta orizzontale Q tende a romperlo per traverso. E quì considerando una sezion qualunque del piediritto, se ne troverà la resistenza rispettiva come al Cap. XVII. dello stesso Libro. Solo deve avvertirsi che siccome il peso di quella porzione del piediritto che poggia sulla sezione ajuta la di lei tenacità, opponendosi alla rotazione che la spinta Q tende ad indurre, così il luogo del momento della spinta si dovrà prendere l'eccesso di questo momento sopra il momento del peso che le contrasta.

CAP. III.

Rinfianchi de' piediritti.

486. Costumasi di rinfiancare esteriormente i piediritti rettangolari, o per mezzo d'una scarpa andante per tutta la loro lunghezza, o per mezzo di contrafforti a luogo a luogo distribuiti. Doppio è il vantaggio di questi rinfianchi: aumentano il peso del piediritto e con ciò ne accrescono la resistenza: allontanano il suo centro di gravità dall' angolo esteriore attorno cui potrebbe rovesciarsi, e così accrescono vieppiù il momento della resistenza. Questi vantaggi possono agevolmente ridursi a calcolo.

487. *Proposizione I.* Trovare la resistenza d' un muro a scarpa contro la spinta orrizzontale, ed il momento della resistenza.

Oltre le denominazioni dell' art. 483 e de' precedenti, sia p il piede o sia la base della scarpa. I prodotti fM, Mk diverranno

$$af G\left(b+\frac{1}{2}p\right) \; ; \; aG\left(\frac{1}{2}b^2+bp+\frac{1}{3}p^2\right)$$

Il primo prodotto esprime la resistenza; il secondo esprime il momento della resistenza.

488. *Coroll. I.* Adunque pel puro equilibrio dev' essere

$$a f G \left(b + \frac{1}{2} p \right) = Q ;$$

$$a G \left(\frac{1}{2} b^2 + b p + \frac{1}{3} p^2 \right) = Q y .$$

Sia come nell'esempio precedente $a = y = 12$; $Q = 4500$; $G = 2000$. E la scarpa suppongasi della sesta parte dell'altezza, onde sia $p = 2$. Si cerchi in quest'ipotesi la grossezza b del muro rettangolare. Dalla seconda equazione si caverà $b = 0,415$. Dalla prima non accade cercarne, poichè anche fatto $b = 0$, la resistenza rimane superiore alla spinta.

Che se volesse conservarsi al muro la grossezza d'un metro, e si cercasse quale scarpa basterebbe per renderlo equilibrato, si farà $b = 1$, e si caverà $p = 1,23$. Basterebbe dunque una scarpa che fosse poco più d'un decimo dell'altezza,

489. *Coroll. II.* Se la medesima scarpa fosse apposta dalla parte interna, sarebbe men vantaggiosa che allora il momento della resistenza riuscirebbe soltanto

$$a G \left(\frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2} b p + \frac{1}{6} p^2 \right)$$

Minor vantaggio riporterebbe ancora chi invece di aggiungere la scarpa, volesse ingrossare il muro d'altrettanto, accrescendone la grossezza di $\frac{1}{2} p$; poichè il momento

della resistenza riuscirebbe

$$a\,G\left(\frac{1}{2}\,b^2+\frac{1}{2}\,b\,p+\frac{1}{8}\,p^2\right)$$

490. *Proposizione II.* Trovare la resistenza d'un muro esternamente difeso da contrafforti parallelepipedi, eguali ed equidistanti; ed il momento della resistenza.

Rappresenti la Fig. 37 la pianta del piedritto, e i due punti L, G dividano per mezzo gl' intervalli de' contrafforti. Supponendosi che la spinta orizzontale operi egualmente su tutta la lunghezza del muro, basterà considerarne il pezzo chiuso tra le sezioni $L\,l$, $G\,g$. Condotto un piano verticale per la sezione di mezzo $A\,B$, cadrà su questo piano così il centro di gravità del solido, come la direzione della spinta tendente da B verso A.

Posto ciò sia l'altezza del muro $=a$; la sua grossezza $L\,l=B\,H=b$; la lunghezza del contrafforte $H\,A=c$; la di lui grossezza $M\,N=P\,Q=p$; l'intervallo $L\,G=H\,h=d$.

Qui i due prodotti $f\,M$, $M\,k$ riusciranno

$$a\,f\,G\,(b\,d+c\,p);\ a\,G\left(\frac{1}{2}\,b^2\,d+b\,c\,d+\frac{1}{2}\,c^2\,p\right)$$

de' quali il primo dà la resistenza; il secondo dà il momento della resistenza.

Eguagliando questi valori alla spinta Q ed al suo momento $Q\,y$ si avranno come prima

le condizioni dell' equilibrio; e date le dimensioni del muro o del rinfianco a riserva di una, si potrà questa determinare siccome conviene per l' equilibrio.

491. *Coroll. I.* Men vantaggioso si troverebbe il contrafforte interno; e meno ancora, se tutta la solidità de' contrafforti si convertisse in uniforme ingrossamento del muro.

492. *Coroll. II.* Talvolta il contrafforte è un prisma di base trapezia, essendo la coda PQ maggiore o minore del collo o sia radice MN. Sia come prima $MN=p$, e sia $PQ=p$.

Allora pel contraforte esterno il momento della resistenza si troverà

$$aG\left(\frac{1}{2}b^2d+bcd+\frac{1}{6}c^2(2p+q)\right)$$

e pel contrafforte interno

$$aG\left(\frac{1}{2}b^2d+\frac{1}{2}bc(p+q)+\frac{1}{6}c^2(p+2q)\right)$$

Da che si vede essere più vantaggiosa ai contrafforti esterni la forma $p>q$; ed agl' interni la forma $p<q$.

493. *Coroll. III* Aggiungiamo un esempio a dichiarazione delle proposte formole. Sia la spinta nella lunghezza d'un metro $=4500$; $G=2000$; $a=y=12$; $d=5$; $c=3$; $p=2,3$; $q=1,6$. Si cerca la grossezza b che dovrà

avere il muro affinchè il momento della resistenza pareggi quello della spinta. Si suppone il contrafforte apposto esteriormente.

Qui è da notare che ponendosi = 4500 la spinta sulla lunghezza d'un metro, la spinta sulla lunghezza d che val cinque metri sarà cinque volte maggiore, onde sarà $Q = 22500$. Ora introdotti i valori numerici nell' equazione

$$aG\left(\frac{1}{2}b^2d + bcd + \frac{1}{6}c^2(2p + q)\right) = Qy$$

si avrà $b = 0,127$. E tal grossezza porrà il muro in istato di equilibrare la spinta.

CAP. IV.

Della spinta de' terrapieni.

494. LEMMA. Posto un peso R sopra un piano inclinato alla verticale coll' angolo m, cercasi qual potenza orizzontale A sarà bastante a trattenerlo, sicchè non corra giù pel piano, avendo riguardo all' attrito.

Decomposta ciascuna delle forze R, A in due, l' una parallela, l' altra normale al piano, ne risulterà parallelamente al piano la forza R cos. $m - A$ sin. m, e normalmente al piano la forza R sin. $m + A$ cos. m. Ora per l' equilibrio deve la prima di queste

forze eguagliar precisamente l' attrito. Sarà dunque

$$R \cos. m - A \sin. m = f R \sin. m + f A \cos. m$$

onde si trae

$$A = R . \frac{1 - f \text{ tang. } m}{\text{tang. } m + f} .$$

495. *Coroll.* Quindi se invece d'una potenza orizzontale, il peso R fosse trattenuto da un muro, o da un ostacolo qualunque, la spinta orizzontale esercitata dal peso contro l' ostacolo sarebbe quella stessa

$$R . \frac{1 - f \text{ tang. } m}{\text{tang. } m + f} .$$

496. *Proposizione.* Determinare la spinta orizzontale del terrapieno $BCEF$ (Fig. 38) contro del muro $ABCD$, e il momento di questa spinta per rovesciarlo attorno l' angolo A.

Consideriamo la spinta del triangolo di terra BCE, di cui la scarpa BE declini dalla verticale coll' angolo $CBE = m$. Le rette PM, pm parallele a BE chiudano il trapezio elementare $PpmM$. Sia $BC = a$, $CP = x$, $Pp = dx$; sarà il trapezio $Ppm M = x dx$ tang. m; e chiamando g il peso specifico della terra, sarà il peso di quel trapezio $= g x dx$ tang. m. Adunque la spinta orizzontale che esso esercita sulla retta

Pp sarà (495) $g\,x\,dx$ tang. $m \cdot \frac{1 - f \text{ tang. } m}{\text{tang. } m + f}$,

o sia $g\,x\,dx \cdot \frac{1 - f \text{ tang. } m}{1 + f \cot. m}$.

Facendo per brevità $\frac{1 - f \text{ tang. } m}{1 + f \cot. m} = M$, sarà la suddetta spinta $M g\,x\,dx$, ed integrando, e poscia facendo $x = a$ sarà la spinta totale $\frac{1}{2} a^2 g M$.

Similmente il momento della spinta elementare esercitata sopra Pp è $Mg(a-x)\,x\,dx$; ove integrando, e poi facendo $x = a$ avremo il total momento della spinta $= \frac{1}{6} a^3 g M$.

Resta a fissare l'angolo m. Si osservi (a) che tanto la spinta quanto il suo momento si annullano, o sia tang. $m = 0$, o sia tang. $m = \frac{1}{f}$. Tra questi due valori ha dunque un valore intermedio, cui risponde la massima spinta, e il massimo momento. Questo valore si trova facendo $dM = 0$, e riesce

$$\text{tang. } m = -f + \sqrt{(1 + f^2)}$$

Quindi sarà la spinta

$$= \frac{1}{2} a^2 g \left[\sqrt{(1 + f^2)} - f \right]^2$$

(a) *Coulomb Mem. presentées etc. Tom. VII.*

ed il momento della spinta

$$= \frac{1}{6} a^3 g \left[\sqrt{(1+f^2)} - f \right]^2$$

Il che si cercava.

497. *Coroll.* Conosciuta la spinta orizzontale del terrapieno, e il suo momento, sarà facile proporzionarle la resistenza del rivestimento $A\,B\,C\,D$, trovandone le dimensioni opportune per l' equilibrio.

Sia il muro $A\,B\,C\,D$ rettangolare alto metri 12 al pari del terrapieno. Sia $G = 2000$ qual' è comunemente il peso specifico de mattoni; $g = 1428$ quale suol essere il peso specifico delle terre forti, per le quali ancora può farsi (415) $f = 0,75$. Si cerchi la grossezza b da darsi al muro onde il momento della resistenza pareggi il momento della spinta.

Il momento della spinta si troverà $= 102816$; a cui mettendo uguale il momento della resistenza (483) $\frac{1}{2} a\, b^2\, G$, troveremo $b = 2,93$.

Dando al muro una scarpa d' un sesto dell' altezza, si troverebbe similmente per l' art. 488 la grossezza $b = 1,15$.

CAP. V.

Dell'equilibrio e della spinta de' Poligoni.

498. Di più travi connesse a foggia di poligono si compongono i tetti, i ponti di legno, le armature de' palchi, ed altre opere di simil fatta. Le travi pel proprio peso e pel carico sovrapposto si spingono e si premono scambievolmente, ed insieme spingono e premono i piediritti che ne sostengono le estremità. Non si tralascia di commetter le travi quanto meglio si può, per impedire il chiudersi o l'aprirsi degli angoli; ma poichè queste commessure non hanno forza nè molto gagliarda nè durevole, così giova cercare in primo luogo come possa darsi al poligono tal forma che le travi s'equilibrino fra loro stesse. Cercasi in secondo luogo la spinta che il poligono così equilibrato esercita sui piédiritti, affine di proporzionarvi la loro resistenza.

Per queste ricerche non abbiamo che a riportarci ai Capi XX. e XXII. del Libro I. ove gli articoli 136. 138. 139. 140. 142. comprendono la soluzion generale de' due problemi accennati, e di più altri che in tal argomento potrebbono offrirsi. Qui non faremo che indicare i risultati di quella Teo-

ria per alcuni casi più ovvj. Nel che supporremo che il tetto o poligono qualunque sia simmetrico attorno la verticale di mezzo, così per la forma, come per la distribuzione del peso. Ricorderemo ancora, che i pesi che aggravano le travi, comunque siano distribuiti, ponno sempre ridursi (158) alle loro estremità, o sia agli angoli del poligono.

499. *Proposizione I* Sia il tetto triangolare (Fig. 39) $B\,C\,D$; il peso applicato al colmo $C = 2\,P$; il peso applicato a ciascun de' punti B, $D = V$; l'angolo $B\,C\,K = m$. La spinta orizzontale sugli appoggi B, D sarà $= P$ tang. m; e la spinta verticale $= P + V$.

500. *Coroll.* Quando la larghezza $B\,D$ rimanga la stessa, e le travi sieno cariche uniformemente, ed in proporzione della loro lunghezza, crescendo l'elevazione del tetto, scema la spinta orizzontale ne' termini B, D; e cresce la spinta verticale.

Infatti essendo allora P, ed V proporzionali a $B\,C$ o sia a $\frac{B\,K}{\text{sin. } m}$, sarà la spinta orizzontale alla verticale come $\frac{B\,K}{\text{cos. } m} : \frac{2\,B\,K}{\text{sin. } m}$. Dunque etc.

501. *Proposizione II.* Sia il tetto quadrangolare $A\,B\,D\,E$; il peso nell'angolo $B = Q$;

il peso nel termine $A = V$; l'angolo $ABM = n$. La spinta orizzontale sugli appoggi A, E sarà $= Q$ tang. n; e la spinta verticale $= Q + V$.

502. *Proposizione III.* Sia il tetto pentagono $ABCDE$; il peso nel colmo $C = 2P$, nell'angolo $B = Q$; nel termine $A = V$: l'angolo $BCK = m$; l'angolo $ABM = n$. Per l'equilibrio dovrà essere

$$\frac{2P}{2 \text{ cot. } m} = \frac{Q}{\text{cot. } n - \text{cot. } m}$$

o sia P tang. m $(P + Q)$ tang. n.

Ed allora la spinta orizzontale sugli appoggi A, E sarà $= P$ tang. m; e la spinta verticale $= P + Q + V$.

503. *Coroll. I.* Se $2P = Q$ come avviene quando le travi sono eguali ed omogenee, la condizione dell'equilibrio è questa

$$\text{tang. } m = 3 \text{ tang. } n.$$

504. *Coroll. II.* Qui s'offre a sciogliere (*a*) il seguente Problema. Data la larghezza $AE = 2p$ e l'altezza $QC = q$, formare di quattro travi eguali un tetto equilibrato.

Chiamando a la lunghezza d'una trave, avremo queste tre equazioni

$$p = a \text{ sin. } n + a \text{ sin. } m \; ; \; q = a \text{ cos. } n + a \text{ cos. } m$$

$$\text{tang. } m = 3 \text{ tang. } n$$

onde potrebbon cercarsi le tre incognite a, m, n.

(a) *Couplet Mem. de l'Acad. de Paris* 1731.

Ma più facilmente s' otterrà l' intento così. Facciasi $AM = x$, $MB = y$, e sarà

$$\text{tang. } m = \frac{p-x}{q-y} \; ; \; \text{tang. } n = \frac{x}{y}$$

quindi le tre equazioni

$$x^2 + y^2 = a^2 \; ; \; (p-x)^2 + (q-y)^2 = a^2$$

$$\frac{p-x}{q-y} = \frac{3x}{y}$$

dalle quali facilmente si avranno le incognite a, x, y.

Così se sia $q = \frac{2}{3}p$ si troverà $a = 0{,}618\,p$; e se $q = p$, verrà $a = 0{,}732\,p$.

505. *Proposizione IV.* Sia il tetto pentagono $ABCDE$ fuor d' equilibrio; e per impedire la mossa degli angoli B, D siasi aggiunta la corda o piana BD, il di cui peso $= 2R$. Le estremità B, D di questa piana saranno spinte in fuori con forza

$$P \text{ tang. } m - (P + Q + R) \text{ tang. } n.$$

E gli appoggi A, E sosterranno la spinta orizzontale $(P + Q + R)$ tang. n.; e la spinta verticale $P + Q + R$.

Ciò s' intenderà agevolmente qualora si osservi che per tal modo viene a formarsi un sistema composto del tetto triangolare BCD, e del quadrangolare $ABDE$. Il primo esercita sui punti B, D la spinta orizzontale all' infuori (499) $= P$ tang. m, e

la spinta verticale $= P$. Quindi il tetragono $A\,B\,D\,E$ riesce gravato negli angoli B, D del peso $P + Q + R$; e però (501) esercita sugli appoggi A, E la spinta orizzontale all' infuori $= (P + Q + R)$ tang. n; e con altrettanta forza (140) i punti B, D vengono spinti all' indentro. Onde etc.

506. *Scolio I.* Sin quì abbiamo considerate le travi come se fossero spranghe d' invincibil fermezza; ma nel vero esse potrebbono spezzarsi in virtù del peso sovvrapposto o del proprio, e potrebbono anche cedere alla compressione, o sia spinta che soffrono secondo la loro lunghezza, della quale spinta agevolmente (140) si determina il valore. Or conoscendosi gli sforzi ai quali soggiace ciascuna trave, si potra pei Capi XVIII. e XIX. del Libro III. esaminare la loro resistenza, e trovare le dimensioni che debbono avere perchè resistano quanto è d' uopo.

507. *Scolio II.* Allor quando la piana BD, ovvero $A\,E$ unisce fra loro i due appoggi, essa risparmia a' piediritti il bisogno di resistere alla spinta orizzontale. Poichè allora i punti B, D ovvero A, E non possono portarsi in fuori senza spezzare la piana stessa, alla qual distrazione essa contrasta con forza per lo più sovrabbondante. Ad ogni modo converrà pel Capo XVI. del Li-

bro III. assicurarsi che la piana tanto resista, quanto per ciò si richiede.

508. *Scolio III.* Ma poichè questa piana pel proprio peso potrebbe rompersi, costumasi d' unirla ad uno o più angoli del poligono per mezzo di travi diritti, o colonnetti. Così al colmo del tetto triangolare BCD s' attiene la piana BD pel colonnetto CK; e così pure la piana AE potria sostenersi coi colonetti AM, DN etc. È da vedere quali sforzi nascono da questa disposizione.

La trave BD tende a rompersi nel mezzo (461) come se fosse applicata al punto K la metà del proprio peso. Quindi il colonnetto CK fa una forza equivalente alla metà del peso di BD; onde il colmo C resta gravato del peso di CK più la metà del peso di BD. Posto ciò si troverà facilmente l' aumento della spinta orizzontale che ne risulta sugli estremi B, D.

Similmente la trave AE tende a romperpersi in M con forza tanto minore della metà del suo peso (459) quanto il rettangolo $AM.M.ME$ è minore del quadrato di AQ. Di questa forza adunque s' intenderanno gravati gli angoli B, D oltre il peso de' rispettivi colonnetti BM, DN.

CAP. VI.

Dell'equilibrio degli Archi, e delle Cupole.

509. QUALI condizioni assicurino l'equilibrio negli Archi e nelle Cupole allorchè i cunei si suppongono affatto sciolti e sconnessi, abbiamo altrove spiegato distesamente. Ora essendo i cunei per l'attrito e per la tenacità del cemento stretti fra loro, ci si apre una via più facile ad esaminar la fermezza di qualunque Arco proposto, ed insieme la forza de' piediritti per sostenerlo. Poichè allora non può l'Arco ceder da prima se non che o in due sezioni, come in *Bb*, *Dd* (Fig. 40) ovvero in tre come in *Bb*, *Cc*, *Dd*. Per ciascuna di queste mosse sarà facile paragonare le forze che tendono ad imprimerla con quelle che vi contrastano.

510. Quella mossa dell'Arco che apre soltanto le due sezioni *Bb*, *Dd* avviene allorquando l'Arco superiore *BCD* discende tutto d'un pezzo scostando colle sue spinte laterali i piani *Bb*, *Dd*. Quella mossa poi che insieme colle sezioni de' fianchi apre la cima *Cc* avviene allorquando il punto *C* discende girando attorno i punti *B*, *D*, mentre questi punti o cedono lateralmente,

o s' alzano girando attorno i termini A, E. Apresi allora l' Arco al di dentro in c, e al di fuori in b, d; appunto come se il poligono $A\,B\,C\,D\,E$ ruinasse aprendosi l' angolo C del colmo, e chiudendosi gli angoli laterali.

Or cercheremo per ambedue queste mosse le condizioni dell' equilibrio. E prima da' centri di gravità G, O de' pezzi $B\,C$, $A\,B$ intenderemo calate le verticali $G\,R$, $O\,T$; e dai punti B, D condurremo $B\,V$, $D\,V$ perpendicolari alle sezioni $B\,b$, $D\,d$, quali sezioni prolungheremo sicchè concorrano in N.

511. *Proposizione I.* Tenda l'Arco $B\,C\,D$ a scendere verticalmente rimovendo le sezioni $B\,b$, $D\,d$. Chiamando O il peso del solido $A\,B$, e G il peso del solido $B\,C$, l' equilibrio sarà determinato da queste due equazioni

$$f\,O = G\left(\frac{K\,N}{B\,K} - f\right)$$

$$O\,.\,\frac{A\,T}{B\,M} = G\left(\frac{K\,N}{B\,K} - \frac{A\,M}{B\,M}\right).$$

Essendo $2\,G$ il peso dell'Arco $B\,C\,D$, intenderemo questo peso applicato al punto V, d' onde prema normalmente sui piani $B\,b$, $D\,d$ spingendo secondo le rette $V\,B$, $V\,D$. Sarà la spinta orrizzontale che esso

esercita in B (499) $= G$ tang. $B\,V\,K = G$ cot. $B\,N\,K = G \cdot \frac{K\,N}{B\,K}$; e la spinta verticale $= G$.

Ora la prima spinta tende a rimovere orizzontalmente il solido $A\,B$, al qual moto resiste l'attrito con forza $= f\,G + f\,O$. Quindi la prima equazione.

Di più la spinta orizzontale tendendo a rovesciare lo stesso solido $A\,B$ attorno l'angolo A opera col momento $G \cdot \frac{K\,N}{B\,K} \cdot B\,M$; cui resiste la spinta verticale G col momento $G \cdot A\,M$, ed il peso O col momento $O \cdot A\,T$. Eguagliando il momento della spinta a quelli della resistenza, e dividendo per $B\,M$ si ottiene la seconda equazione.

512. *Proposizione II.* Tenda ciascuno de' due pezzi $B\,C$, $D\,C$ a girare attorno il vertice dell'arco C, rimovendo i punti B, D. L'equilibrio per questa mossa è determinato dalle due equazioni seguenti

$$f\,O = G\left(\frac{B\,R}{C\,K} - f\right)$$

$$O \cdot \frac{A\,T}{B\,M} = G\left(\frac{B\,R}{C\,K} - \frac{A\,M}{B\,M}\right).$$

Riguardando l'Arco siccome un poligono $A\,B\,C\,D\,E$ (510) mobile attorno i suoi an-

goli, compartiremo (158) i pesi G, O sugli angoli C, B, A. E così avremo, seguendo le denominazioni dell'art. 502

$$2P = 2G \cdot \frac{BR}{BK}; \quad Q = G \cdot \frac{RK}{BK} + O \cdot \frac{AT}{AM};$$

$$V = O \cdot \frac{TM}{AM}; \quad \text{tang. } m = \frac{BR}{CK};$$

$$\text{tang. } n = \frac{AM}{BM}.$$

Sarà dunque (502) la spinta orizzontale nel termine $A = G \cdot \frac{BR}{CK}$, e la spinta verticale $= G + O$, onde l'attrito $= fG + fO$. Quindi affinchè il pezzo AB non sia rimosso orizzontalmente, dovrà essere $fG + fO$ eguale a $G \cdot \frac{BR}{CK}$. Che è la prima equazione.

Di più si richiederà per l'equilibrio (502)

$$P \text{ tang. } m = (P + Q) \text{ tang. } n$$

onde, sostituiti i valori, si ottiene la seconda equazione.

513. *Coroll. I.* Di quì apparisce il modo di esaminare la fermezza d'un Arco dato. Converrà per varj punti B dell'Arco calcolare l'equazioni proposte, nelle quali se i primi membri che rappresentano l'azione della resistenza riusciranno per tutto maggiori de' secondi che danno l'azione della

spinta, potremo prometterci la total sicurezza dell'Arco. La sezione più debole di tutte corrisponderà a quel punto *B* per cui l'eccesso della resistenza sulla spinta, o de' rispettivi momenti apparisca il minore.

Che se fossero date le altre dimensioni, e volesse trovarsi la grossezza conveniente al piedirtto, possono le stesse equazioni servire. Il modo più facile sarà l'assumer prima pel piedirtto una grossezza arbitraria, e quindi cercare il luogo *B* della sezione più debole. Allora per le equazioni relative a quel punto *B* troveremo facilmente la grossezza cercata. Dicasi lo stesso di qualunque altra dimensione dell'Arco, o del piedirtto che volesse determinarsi nella misura conveniente per la stabilità.

Vaglino le stesse regole, e le stesse equazioni per le Cupole; se non che invece de' profili *A B*, *B C*, *B C D* converrà considerare le unghie nate dalla rotazione de' medesimi attorno l'Asse della Cupola.

514. *Scolio I.* Potrebbe avvenire negli Archi (non così nelle Cupole) che i due movimenti indicati all'art. 510. seguissero in senso opposto, rovesciandosi i piedirtti all' indentro attorno gli angoli *a*, *e*. Collo stesso metodo di prima si troverebbero l'equazioni d'equilibrio relative a queste mosse. Ma ordinariamente il pericolo n'è si remoto

che non è pregio dell' opera il trattenervisi.

515. *Scolio II.* La determinazione dell' equilibrio che nasce dalla Proposizione I. viene ad esser quella che già propose de la Hire, e poscia con maggior nitidezza spiegarono Couplet, Belidor ed ultimamente Bossut (*a*). Primo ch' io sappia il Sig. Coulomb (*b*) mosse sospetto che quella regola non bastasse e che potesse la Volta rompersi in quattro pezzi invece di tre: per la qual rottura il Sig Mascheroni assegnò poi (*c*) le condizioni d' equilibrio sotto la forma che abbiamo esposta nella Proposizione II.

CAP. VII.

Saggio d' un altro metodo per esaminare la fermezza delle Volte.

516. Ai metodi esposti nel Capo precedente piacemi aggiungere il tentativo d' un metodo piu diretto, e più semplice. Questo si trae immediatamente dalle condizioni ge-

---

(a) *Mem. de l' Acad. de Paris.* 1774.

(b) *Mem presentées etc. Tom. VII.*

(c) *Nuove ricerche sull' equilibrio delle Volte Probl. X.*

nerali d' equilibrio (165) modificandole siccome richiede l'attrito, e la tenacità de' cementi. Sebbene da quest' ultima gioverà prescindere, essendone la misura così incerta ed incostante, che mal potrebbe affidarvisi la sicurezza della Volta.

Ritorneremo adunque sulla Fig. 21, e diremo P il peso dell' arco parziale $A\,a\,m\,M$, A la spinta orizzontale in $A\,a$, e l' inclinazione del letto $M\,m$ alla verticale, f il coefficiente dell' attrito.

517. *Proposizione*. Affinchè l'Arco $A\,a\,m\,M$ non faccia mossa strisciando lungo il letto $M\,m$, dovrebb' essere (166) $P = A$ tang. e. Ora per riguardo all' attrito basterà che P stia fra i limiti determinati da questa formola

$$P = A \cdot \frac{\text{tang. } e \pm f}{1 \mp f \text{ tang. } e}.$$

Dimostr. La forza con cui quell' Arco tende a strisciare scendendo da m verso M è (494) P cos. $e - A$ sin. e; e per conseguenza la forza con cui tende a strisciare salendo da M verso m è A sin. $e - P$ cos. e. Ad entrambi i moti si oppone l'attrito con forza $= f\,P$ sin. $e + f\,A$ cos. e. Dunque per l'equilibrio dovrà essere.

$\pm P$ cos. $e \mp A$ sin. $e = f\,P$ sin. $e + f\,A$ cos. e

onde etc.

518. *Coroll. I.* Qui veggiam subito come l'imposta $E\,e$ possa benissimo giacere orizzontalmente.

Veggiamo ancora non esser necessario che la risultante GS cada sul letto Mm ad angolo retto, bastando che la cotangente di quell'angolo stia fra i limiti $\pm f$.

Poichè hassi tang. $VGS = \frac{A}{P} = \frac{1 \mp f \text{ tang. } e}{\text{tang. } e \pm f}$

Ora l'inclinazione della GS sulla Mm è sempre la somma degli angoli VGS, MmR; di qui cavando per la trigonometria la cotangente di quell'inclinazione, essa riesce $\pm f$.

519. *Coroll. II.* Avremo poi

$$dP = \frac{A\,de}{\cos.\, e^2} \cdot \frac{1 + f^2}{(1 \mp f \text{ tang. } e)^2}$$

e questo valore dovrem porre nell'equazione (168) fra z ed e, e così avremo i limiti entro i quali posson variare le grossezze dell'Arco, salvo l'equilibrio.

520. *Coroll. III.* Così nell'esempio dell'art. 170. per l'arco circolare, riuscirà

$$z = -R + \sqrt{\left(RR + \frac{2Rm + m^2}{\cos.\, e^2\,(1 \mp f \text{ tang. } e)^2}\right)}.$$

Quando R sorpassi notabilmente la grossezza m, si ha prossimamente

$$z = \frac{m}{\cos.\, e^2\,(1 \mp f \text{ tang. } e)^2}$$

formola assai comoda a calcolare per ciascun punto dell'Arco la conveniente grossezza.

Col segno superiore avremo la grossezza massima, e col segno inferiore la minima che possa darsi all'Arco. Sarà facile il formarne delle Tavole, ed anche il delineare per punti le due curve o sia scale, l'una delle maggiori, l'altra delle minori grossezze. Ed allora qualunque siasi la curva esterna dell'Arco, purchè non esca fuor de' limiti delle due curve suddette, l'Arco sarà sicurissimo per quel che riguarda questa prima condizione dell'equilibrio.

521. *Coroll. IV.* Nella scala delle minori grossezze s'incontra un valor minimo, dove tang. $e = f$, che dà $z = \frac{m}{1+f^2}$. E nella scala delle grossezze maggiori s'incontra un massimo, dove cot. $e = f$ il quale dà z infinito. Al punto poi dove $e = 90°$ cioè nell'imposta orizzontale, entrambe le curve concorrono nello stesso valore di $z = \frac{m}{f^2}$.

Così posto $f = 0,75$ il più che possa l'Arco assottigliarsi ne' fianchi sarà a distanza di quasi 37 gradi dal vertice, ove vien $z = 0,64\,m$; onde quivi può ridursi ai due terzi della sua grossezza alla chiave: ed il più che possa ingrossarsi sarà verso i 53 gradi, ove la sua grossezza può crescere indefinitamente.

522. *Proposiz. II.* Affinchè l'Arco *A a m M* non faccia mossa girando attorno i punti *M, m* sussiste la condizione esposta all'art. 172. Se non che potendo la risultante *G S* cadere sulla *M m* con qualunque obbliquità compresa ne' limiti (518) di Ang. cot. $\pm f$, le rette *M i, m h* (Fig. 23) dovranno inclinarsi alla *M m* con angolo ottuso che abbia per cotangente $-f$. E basterà assicurarsi che la verticale condotta pel centro di gravità dell'Arco non esca fuor del trapezio *f g h i*.

523. *Scolio I.* Assicurato l'equilibrio dell'Arco, resta a considerare la spinta ch'egli esercita sui pulvinari. Esso si appoggia sopra di loro come se fosse tutto d'un pezzo; onde se il peso di tutto l'Arco sia $2R$, e i pulvinari declinino dalla verticale con angolo *E*, ciascun d'essi sosterrà la spinta normale (116) $\frac{R}{\text{sin. } E}$, onde la spinta orizzontale $= R$ cot. *E*, e la spinta verticale $= R$. Sarà facile pel Cap. II. proporzionare a queste spinte le dimensioni de' piediritti.

524. *Scolio II.* Prima che il centro non siasi assodato, non si può contar molto nè sulla tenacità nè sull'attrito pure, il quale per l'interposizione de' granelli di sabbia tuttora sciolti resta notabilmente indebolito. Quindi la necessità di sostenere per qualche

tempo la Volta coi centini, e quindi l' assettamento cui soggiace, allorchè i centini troppo presto si slentano.

525. *Scolio III.* Le stesse modificazioni si applicano alle condizioni d' equilibrio per le Cupole, cangiando le formole degli art. 177. 180. come abbiamo cangiate le precedenti.

CAP. VIII.

Della fermezza de' modelli.

526. Sperimentata la fermezza d' un modello di macchina o d' edificio, non senza molta cautela vuolsi procedere a conchiuderne la fermezza dell' edificio o della macchina stessa.

E prima convien distinguere fra le spinte che tendono semplicemente a spostare le parti, e quelle che tendono a spezzarle. Tradotto il sistema dal piccolo al grande, le prime crescono in egual proporzione colle resistenze, le seconde crescono in proporzion maggiore; ond' è che per rapporto a queste ultime, quanto è più grande la fabbrica, tanto a proporzione è più debole.

Poi fra queste azioni medesime convien distinguer tre classi: altre tendon a svellere le parti per distrazione, altre a romperle

per traverso, altre a schiacciarle per compressione. Appartiene alla prima classe lo stiramento che soffrono le chiavi o le catene delle Volte, e le piane de' tetti; alla seconda il carico che tenta piegare o rompere le travi orizzontali o inclinate; alla terza il peso che aggrava verticalmente i muri e le colonne.

527. *Proposizione I.* Sia un lato del modello al lato omologo della costruzione come $1 : n$. La spinta che tende a distrarre, o a rompere per traverso le parti cresce dal piccolo al grande come $1 : n^3$; e la resistenza a queste rotture cresce soltanto come $1 : n^2$.

La prima asserzione è manifesta: poichè le spinte debbon crescere come i pesi delle parti che spingono, e questi crescono in ragion triplicata dei lati omologhi.

Essendo poi le dimensioni del solido modulare a, b, c, saranno quelle dello stesso solido nella fabbrica na, nb, nc. Ora la resistenza assoluta che contrasta alla forza distraente, cresce nella ragione (446) $ab : na \cdot nb$; e la resistenza rispettiva che contrasta alla forza tendente a rompere per traverso, cresce nella ragione (448) $\frac{a^2 b}{c} : \frac{n^2 a^2 \cdot nb}{nc}$. Entrambe queste ragioni si riducono a quella di $1 : n^3$.

528. *Coroll. I.* Perciò quei pezzi che a tali spinte soggiacciono avranno tanto minor fermezza nella fabbrica che non hanno nel modello, quanto sarà maggiore il numero n; il quale potrà crescere a segno che la fabbrica non possa più reggere.

529. *Coroll. II.* Adunque nel tradurre il modello di piccolo in grande non si può passare un certo limite d' ingrandimento.

Sia P il maggior peso cui possa reggere uno de' travicelli del modulo, e p quel peso o spinta che esso attualmente sostiene. Il maggior peso cui potrà reggere il trave corrispondente della fabbrica sarà $n^2 P$, ed il peso che esso attualmente sosterrà $n^3 p$. Dovrà dunque essere $n^3 p < n^2 P$, e tutto al più $n^3 p = n^2 P$, onde $n = \frac{P}{p}$. E questa sarà la maggior grandezza a cui quel pezzo potrà tradursi.

530. *Coroll. III.* Che se volesse pure accrescersi il modello a piacimento, conservandogli tuttavia sufficiente fermezza, sarà necessario nell' ingrandire ciascun pezzo alterare qualcuna delle sue dimensioni.

Vogliasi per esempio conservare al trave la larghezza nb, e la lunghezza nc proporzionata al modello, e si cerchi la grossezza xa opportuna perchè la sua resistenza pareggi la spinta ch' esso dovrà sostenere.

Sarà la resistenza del travicello a quella del trave come $\frac{a^3 b}{c} : \frac{x^3 a^3 . nb}{nc}$ o sia come $1 : x^3$. Quindi il trave potrà tutt'al più sostenere il peso Px; ma esso sosterrà infatti il peso $n^3 p$. Dunque dovrà essere per lo meno $Px = n^3 p$; o sia $x = n\sqrt{\frac{np}{P}}$.

Se il trave fosse di sezione quadrata, e ritenendo la lunghezza nc si cercasse il lato xa, si troverebbe nella stessa guisa $x = n\sqrt[3]{\frac{np}{P}}$.

531. *Proposizione II.* La spinta che tende a schiacciare le parti per compressione cresce dal piccolo al grande come $1 : n^3$; e la resistenza cresce soltanto come $1 : n$.

Di fatti la resistenza alla compressione cresce nel rapporto (471) $\frac{a^3 b}{c^3} : \frac{n^3 a^3 . nb}{n^3 c^3}$ che è quello di $1 : n$.

532. *Coroll. I.* Sia dunque P il maggior carico che possa portare il muro o il pilastrino modulare, e sia p il carico di cui realmente è gravato. Pel muro o colonna analoga sarà nP il maggior peso che potrà sostenere, ed $n^3 p$ il peso che sosterrà realmente. Quindi potrà essere tutt'al più

$n^3 p = n P$, onde $n \sqrt{\frac{P}{p}}$, massimo termine dell' ingrandimento.

533. *Coroll. II.* Che se ritenendo la lunghezza, o vogliam dire altezza $n c$, e la larghezza $n b$ volesse darsi al solido tal grossezza $x a$, per cui nell' ingrandirsi non indebolisca a segno di rompersi, si troverebbe come sopra (530) $x = n^3 \sqrt{\frac{p}{P}}$ per lo meno.

E trattandosi d' un pilastro a base quadrata, o d' una colonna cilindrica, cercandosi parimente il lato, o diametro $x a$ verrebbe $x = n \sqrt[3]{\frac{n^3 p}{P}}$.

534. *Coroll. III.* Gli esposti principj daranno norma sicura a giudicare della robustezza d' una costruzione, da prove che se ne facciano sul modello. Nel quale ove siasi esplorata la forza di ciascun pezzo, ed il limite dell' ingrandimento che esso comporta, ben si vede che nell' ingrandire tutto il modello dovrà starsi al di sotto del più piccolo fra questi limiti. E quando pur vogliasi oltrepassarlo, veggiamo come convenga alterare le misure di ciascun pezzo per conservargli conveniente fermezza.

LIBRO QUINTO

DELLE MACCHINE.

SEZIONE PRIMA

Delle Macchine in equilibrio.

CAP. I.

Della Leva.

535. *Leva* è una spranga rigida, mobile attorno d'un *fulcro*, e tratta in varj punti da varie forze. Le distanze delle direzioni di queste forze dal fulcro, diconsi i rispettivi *bracci di leva*.

Riguardasi specialmente nella leva il caso più semplice, che è quello d'un *peso* Q equilibrato da una *potenza* P. E la leva dicesi *di primo genere* se il fulcro è collocato fra la potenza e il peso, *di secondo genere* se il peso sta in mezzo, *di terzo genere* se sta nel mezzo la potenza.

536. *Proposizione*. Nella leva in equilibrio sta la potenza al peso in ragion reciproca de' rispettivi bracci di leva.

Sia a il braccio della potenza P, e b il

braccio del peso Q; sarà nell' equilibrio $Pa = Qb$.

Infatti Pa, Qb sono (93) i momenti delle forze P, Q per aggirar la leva sul fulcro, e questi per l'equilibrio debbono (95) essere uguali.

537. *Coroll. I.* Se le forze sono parallele, nel primo genere di leva la potenza può essere maggiore o minore del peso; ma nel secondo genere la potenza e sempre minore del peso, e nel terzo è sempre maggiore.

538. *Coroll. II.* Volendosi tener conto del peso proprio V della leva, sarà questo una terza forza che opera sulla leva, ed il suo braccio sarà la distanza del fulcro del centro di gravità della leva stessa. Sia c questo braccio. Sarà l'equazione dell' equilibrio $Pa \pm Vc = Qb$, secondo che il peso V tende a girare la leva nel senso della potenza P, o al contrario.

539. *Coroll. III.* Allungando la leva di secondo genere, se per una parte s'avvantaggia la potenza, accrescendosi il braccio a, per l'altra si scapita, venendo a crescere il momento Vc. Di quì il problema. Dato il peso Q ed il suo braccio b, e dato il peso g della leva sulla lunghezza 1, trovare la lunghezza a della leva, che dia il maggior vantaggio alla potenza.

Avremo $V = ga$, e $c = \frac{1}{2}a$. Quindi per l'equilibrio sarà.

$Pa - \frac{1}{2}ga^2 = Qb$, onde $P = \frac{1}{2}ga + \frac{Qb}{a}$.

Affinchè P riesca minimo, si farà $dP = 0$, onde avrassi $a = \sqrt{\frac{2Qb}{g}}$.

540. *Coroll. IV.* Il fulcro così sostiene lo sforzo delle Potenze P, Q, V come se gli fossero immediatamente applicate (105).

541. *Scolio.* Qualunque poi sia il numero e la direzione delle forze applicate, e qualunque sia il modo col quale la leva si connette col fulcro, le proprietà dell'equilibrio e le pressioni sostenute dal punto d'appoggio si dovranno dedurre dalle condizioni d'equilibrio d'un sistema di forma invariabile. Per il che rimettiamo ai Capi XV. e XVI. del Libro primo.

Rimetteremo similmente agli ultimi Capi del terzo Libro perciò che spetta al vedere che il fulcro e la leva stessa siano abbastanza robusti per reggere agli sforzi delle potenze. La qual osservazione vuol farsi anche nelle altre macchine che successivamente andremo considerando.

CAP. II.

Varie maniere e combinazioni di Leve.

542. PROPOSIZIONE *I.* Nella bilancia due pesi eguali P, Q posti indifferentemente uno per parte, deggiono equilibrasi fra loro. E a ciò richiedesi 1.° che la bilancia scarica de' pesi conservi l'equilibrio. 2.° che le sue braccia siano d'eguale lunghezza.

Infatti siano M, N i momenti delle due parti della bilancia scarica; a, b le due braccia. Dovrà dunque essere

$M + Pa = N + Qb$; $M + Qa = N + Pb$

Quì sottraendo la seconda equazione dalla prima mi viene $a = b$; aggiungendo insieme le due equazioni, e facendo $a = b$, mi viene $M = N$. Dunque etc.

543. *Scolio I.* La bilancia è falsa se manchi d'alcuna delle due condizioni accennate; ma può tuttavia servire a determinar giustamente il peso. Poichè il primo difetto si corregge facilmente, equilibrando la bilancia scarica coll'aggiungervi nell'un de' piatti quel peso che a tal effetto si richiede. Al secondo poi si supplisce pesando il corpo prima nell'uno, poi nell'altro piatto; il suo vero peso sarà medio proporzionale fra quello de' due marchi che hanno servito ad equilibrarlo.

Poichè se il peso P posto successivamente su ciascuno de' piatti viene equilibrato da' marchi Q, Q', sarà $Pa = Qb$, $Pb = Q'a$; onde $P = Q\,Q'$.

544. *Scolio II.* La squisitezza della bilancia, e la comodità di adoperarla esigono altre due condizioni. Vuolsi in primo luogo che piegato casualmente il giojo, la bilancia non s' arresti, nè trabocchi, ma lentamente ripigli la primiera situazione; e per ciò si richiede che il centro di gravità del giogo stesso cada un poco al di sotto del centro del moto. Vuolsi in secondo luogo la bilancia sensibile alle minime diseguaglianze di peso; e per ciò si richiede che il centro di gravità della bilancia carica non cada troppo al di sotto del centro del moto, altrimenti il momento d'inerzia del sistema riuscirà (265) troppo grande, e la velocità angolare di rotazione (288) troppo piccola. Perciò le bilancie fatte per piccoli pesi non ponno utilmente servire pei grandi.

545. *Proposizione II.* Nella Stadera se il braccio più lungo dividasi in parti eguali, e il marco percorra successivamente ciascuna divisione, esso farà equilibrio a dei pesi crescenti in progressione aritmetica.

Sia a il braccio più corto; b, b', b'' etc. i successivi bracci di leva del marco Q; P, P', P'' etc. i pesi cui fa equilibrio; Vc

il momento del peso della stadera. Avremo successivamente

$$P a = Q b + V c \; ; \; P' a = Q b' + V c ;$$
$$P'' a = Q b'' + V c \text{ etc.}$$

ove se b, b', b'' etc. sono in serie aritmetica, si vede che debbon esservi ancora P, P', P'' etc. Di quì riesce agevolissima la gradnazione della Stadera.

546. *Proposizione III.* Se la potenza equilibra il peso per via di più leve, l'una agente sull'altra, sta la potenza al peso come il prodotto di tutte le braccia di leva poste dalla parte della potenza.

Siano tre leve, e sia X la forza che fa la prima leva sull'estremità della seconda, Y la forza che fa la seconda sull'estremità della terza; e segniamo con lettere accentate i bracci corrispondenti nella seconda leva, con due accenti quei della terza. Sarà

$$P a = X b \; ; \; X a' = Y b' \; ; \; Y a'' = Q b''$$

onde $P a a' a'' = Q b b' b''$.

547. *Proposizione IV.* Determinare le condizioni dell'equilibrio nel ponte levatojo.

Nel ponte levatojo espresso in profilo dalla Fig. 41 si riuniscono due leve, l'una di primo, l'altra di secondo genere. AB è il tavolato del ponte mobile attorno il fulcro A, ed ha l'estremità B congiunta per mezzo della catena BC coll'estremo C della leva KDC mobile attorno il fulcro D.

Se le due leve AB, KDC agissero immediatamente l'una sull'altra, la condizione dell'equilibrio si avrebbe tosto dalla Proposizione precedente: ma conviene aver riguardo al peso ed alla situazione della catena BC. Noi chiameremo X la tensione della catena, ed esprimendo colle lettere segnate nella figura i pesi de' lati AB, BC, DC, DK compartiremo ciascuno di questi pesi sui punti d'appoggio, e sulle estremità de' lati. Ed è palese che il punto B resterà gravato del peso $T + B$, il punto C del peso $Q + R$; il punto K del peso P.

Posto ciò, pei punti A, D si conducano le perpendicolari AG, DF sulla BC, e le orizzontali AH, LO; e pei punti B, C, K si conducano le verticali BH, CO, KL. Or si vede che nella leva AB il peso $T + R$ col braccio AH equilibra la tensione X col braccio AG; e nella leva KDC il peso P col braccio DL equilibra il peso $Q + R$ col braccio DO, e la tensione X col braccio DF. Sarà dunque

$$(T + R)\,AH = X.\,AG$$

$$P.\,DL = (Q + R)\,DO + X.\,DF$$

Dalle quali due equazioni eliminando X si avrà la condizione d'equilibrio ricercata.

548. *Corollario.* Se il quadrilatero $ABCD$ è parallelogrammo, riesce

$$P.\,DK = (T + Q + 2R)\,AB$$

Determinato per mezzo di questa equazione il peso P, esso terrà in equilibrio il ponte levatojo in qualunque situazione..

549. *Scolio*. Curvandosi la catena BC pel proprio peso, essa non si stende in linea retta, come abbiam supposto, ma ciò non fa gran divario.

Abbiamo anche supposto che i pesi che gravano i lati siano distribuiti in modo da poterli considerare come raccolti nel loro punto di mezzo. Ma è facile lo scorgere come debbansi cangiare le condizioni d'equilibrio se i pesi siano diversamente distribuiti.

CAP. III.

Dell' Asse nella Ruota.

550. Qui (Fig. 42) la potenza P è applicata alla periferia d'una ruota, e il peso Q pende da una fune avvolta ad un cilindro che gira insieme colla ruota.

Talvolta il cilindro non sostiene immediatamente il peso; ma (Fig. 43) move colle sue pinne una ruota dentata, ed il cilindro o rocchetto di questa ne aggira similmente un altra, e così sino all' ultima, il cilindro della quale porta il peso Q. E queste sono le *Ruote dentate*, le quali, come è palese,

sono sistemi di più assi nella ruota, che agiscono l' uno sull' altro.

551. *Proposizione I.* Nell' equilibrio dell' Asse nella Ruota sta la potenza al peso come sta il raggio del cilindro a quello della ruota.

Sia il raggio della ruota a, quello del cilindro b; sarà per l' equilibrio $Pa = Qb$.

Ciò segue dall' articolo 95: e altronde è chiarissimo che questa macchina riducesi alla leva di primo genere.

552. *Proposizione II.* Se la potenza equilibra il peso mediante un sistema di ruote dentate (Fig. 43) starà la potenza al peso come sta il prodotto de' raggi de' rocchetti al prodotto de' raggi delle ruote.

Si dimostra come all' art. 546.

553. *Scolio.* Se il peso Q discende facendo girare il sistema, spesse volte v' ha bisogno di sapere quanti giri farà l' ultima ruota C nel tempo che la prima A compie il suo giro. Or questa cognizione dipende da quella del numero dei denti di ciascuna ruota A, B, e delle pinne di ciascun rocchetto b, c. Non si mette in conto nè l' ultima ruota, nè il primo rocchetto, perchè questi non sono dentati, o almeno nulla monta che lo siano.

Siano A, B i numeri de' denti delle ruote A, B, e b, c i numeri delle pinne de'

rocchetti b, c. E mentre la ruota A fa giri N, supponghiamo che il rocchetto b colla sua ruota B faccia giri N', ed il rocchetto c colla sua ruota C faccia giri N''. È manifesto che quanto una ruota ha più denti che non ha pinne il rocchetto contiguo, tanto meno giri farà nello stesso tempo la prima, che non fa il secondo. Sarà dunque

$$A : b :: N' : N; \text{ e } B : c :: N'' : N'$$

onde $$N : N'' :: bc : AB.$$

554. *Corollario*. Di quì dipende la soluzione di questo Problema: in un dato sistema di ruote dentate, fissare il numero dei denti delle ruote, e delle pinne de' rocchetti in guisa che i numeri de' giri contemporanei fatti dalle ruote estreme siano in un dato rapporto.

CAP. IV.

Della Troclea, e della Taglia.

555. Nella *Troclea fissa* il centro è fermato ad un appoggio stabile, e la potenza ed il peso sono applicati ai due capi della fune che abbraccia la Troclea. Nella *Troclea mobile* il peso pende dal centro, l' un capo della fune è fisso, l' altro vien tratto dalla potenza.

Nella *Taglia* v' ha un sistema di troclee fisse collegate in una cassa o armatura comune, ed un altro di troclee mobili pur collegate insieme colla sua cassa, alla quale s'attacca il peso. Una fune abbraccia col suo giro tutte le troclee; l'un de' suoi capi è fermato ad un punto del sistema, l'altro capo uscendo fuori dall' una delle troclee fisse, vien tratto dalla potenza.

Si uniscono talvolta più troclee mobili, o più taglie così che l'una agisca sull' altra; e queste sono le *Troclee* o *Taglie composte*.

È palese che la troclea fissa viene ad essere una leva di primo genere e di braccia eguali, sicchè non avvantaggia punto la potenza, e giova solo a cangiarne la direzione. Ma la troclea mobile si riduce ad una leva di secondo genere, come tosto vedremo.

556. *Proposizione I.* Nella troclea mobile in equilibrio (Fig. 44) i due tratti della fune declinano egualmente dalla verticale; e sta la potenza P al peso Q come sta il raggio al doppio coseno di questa declinazione; o sia come sta il raggio della troclea alla corda dell'arco abbracciato dalla fune.

Venendo in contrasto il peso Q colle tensioni dei due tratti della fune PA, EB, è forza che le due tangenti PA, EB prolungate concorrano in un punto X della verti-

cale condotta pel centro della troclea. Quindi gli angoli AXC, BXC riescono eguali: ed è (125)

$P : Q :: 1 : 2 \cos. AXC :: 1 : 2 \cos. CAD :: AC : AB$.

Si perviene alla stessa proporzione riguardando la troclea mobile come una leva di secondo genere, nella quale la potenza P tende a sollevare la troclea facendola girare attorno il punto B, mentre il peso Q tende ad aggirarla in contrario. Condotta BF perpendicolare a PA, il momento della potenza $P.BF$ deve eguagliare il momento del peso $Q.BD$. Adunque $P : Q :: BD : BF$, o sia pei triangoli simili BAF, ADC, come AC ad AB.

557. *Corollario*. La troclea mobile giova alla potenza sintantochè l'angolo AXC sta sotto dei 60 gradi; oltre quel termine è svantaggiosa. Se i due tratti della fune sono paralleli, la potenza è la metà del peso. E questo è il maggior vantaggio che possa aversi dalla Troclea.

558. *Proposizione II.* Nella Taglia in equilibrio (Fig. 45) i tratti della fune che sostengono le troclee mobili declinano dalla verticale in guisa, che la somma de' seni di queste declinazioni sia zero; ed allora sta la potenza al peso, come sta il raggio alla somma de' coseni delle suddette declinazioni.

Infatti le tensioni de' suddetti tratti della fune saranno tutte eguali fra loro (132) e risolvendo ciascuna d' esse in due forze, l' una orizzontale, l' altra verticale, le forze orizzontali dovranno equilibrarsi fra loro, le forze verticali dovranno equilibrarsi col peso Q. Ora prendendo per raggio comune la retta che esprime la tensione della fune, le prime vengono espresse da' seni delle rispettive declinazioni, e le seconde da' loro coseni. Dunque la somma de' seni dovrà annullarsi, e la somma de' coseni dovrà eguagliarsi al peso Q. Starà dunque la tensione della fune, o sia la potenza P al peso Q come sta il raggio alla somma de' coseni etc.

559. *Corollario*. Se le funi sono parallele, sta la potenza al peso, come l' unità al numero de' tratti di fune che tirano la taglia mobile. E questa è la più vantaggiosa disposizione della taglia.

560. *Proposizione III.* In un sistema di troclee mobili l' una agente sull' altra (Fig. 46) sta la potenza al peso, come sta il prodotto de' raggi delle troclee al prodotto delle corde degli archi abbracciati dalla fune in ciascuna troclea.

Si dimostra come all' art. 546.

561. *Corollario*. Se tutte le funi sono parallele, che è la disposizione più vantaggiosa,

sta la potenza al peso come $1 : 2^n$, essendo n il numero delle troclee.

562. *Scolio*. Più Taglie ancora ponno combinarsi in guisa che agiscano l' una sull' altra, essendo applicata la potenza alla prima di essa, ed il peso all' ultima. Qui pure il rapporto della potenza al peso sarà composto dei rapporti che hanno luogo per ciascuna delle Taglie.

CAP. V.

Del Piano inclinato.

563. *Proposizione*. Se la potenza P equilibra il peso Q posto su d' un piano inclinato, sta la potenza al peso, come sta il coseno dell' inclinazione del piano alla verticale, al coseno dell' inclinazione della potenza al piano stesso.

Sia l' angolo del piano colla verticale $= m$; l' angolo della direzione della potenza col piano $= n$. Sarà l' equazione dell' equilibrio

$$P = Q \frac{\cos. m}{\cos. n},$$

Infatti risolvendo ciascuna delle forze P, Q in due, l' una parallela al piano, l' altra ad esso normale, le forze parallele al piano riescono $P \cos. n$, $Q \cos. m$; e le forze

normali riescono P sin. n, Q sin. m. Ora queste ultime sono elise dal piano stesso, il quale ne risulta premuto con forza $= P$ sin. $n + Q$ sin. m. Le prime poi deggiono elidersi fra loro, onde P cos. $n = Q$ cos. m.

564. *Corollario*. Traendo la potenza orizzontalmente, l'angolo n diviene complemento dell' angolo m, onde $P = Q$ cot. m. E però la potenza sta al peso, come sta l'altezza del piano alla base.

Traendo poi la potenza con direzione parallela al piano, l'angolo n si fa nullo, onde $P = Q$ cos. m. E però la potenza sta al peso, come sta l'altezza del piano alla lunghezza; e questo è il massimo vantaggio che possa darne il Piano inclinato.

CAP. VI.

Della Vite, e del Cuneo.

565. *Elice* è una curva descritta nella superficie d'un cilindro retto con inclinazione costante al lato del cilindro. La distanza fra due punti consecutivi dell'elice presi sullo stesso lato, dicesi *passo dell'elice.*

Svolgasi la superficie del cilindro AC (Fig. 47) nel rettangolo ac, nel quale si segnino le parallele ah', hk' etc. Rivolgen-

do questo rettangolo attorno la superficie del cilindro, vi resterà segnata l'elice. Onde è manifesto che ogni elemento dell'elice è una retta inclinata in modo che sta l'altezza alla base, come sta il passo dell'elice alla periferia della base del cilindro.

566. *Vite* (Fig. 48) è un cilindro retto guernito d'un risalto avente per asse un elice. Essa si aggira dentro un cilindro stabile *M*, che dicesi *Madrevite*, avente un incavo spirale che corrisponde al risalto della Vite. La potenza *P* per mezzo del manubrio *A B* tiene in equilibrio la Vite gravata nella cima del peso *Q*, la quale tende a discendere ravvolgendosi per le spire della Madrevite.

Talvolta la Vite è fermata stabilmente, e attorno di essa può girare la Madrevite; alla quale allora sono applicate entrambe le potenze *P*, *Q*.

Formasi una macchina composta della Vite e dell'Asse nella Ruota, allorquando la Vite non sostiene immediatamente il peso, ma spinge il dente d'una Ruota (Fig. 49) dal cui cilindro pende il peso *Q*. E questa dicesi *Vite perpetua*.

567. *Proposizione I.* Nella Vite in equilibrio sta la potenza al peso, come sta il passo dell'elice alla periferia che la potenza tende a descrivere.

Sia il passo dell'elice $= h$, e sia $c A = a$, $c B = b$. Alla potenza P che agisce in A si sostituisca una potenza X che agisca sul punto B. Sarà (97) $P : X :: c B : c A$, o ancora

$$P : X :: 2\pi b : 2\pi a .$$

Ora questa X è una potenza orizzontale che sostiene il peso Q, mentre esso tende a scendere per un piano inclinato in guisa (565) che sta l'altezza alla base, come sta h a $2\pi b$. Dunque (564)

$$X . Q :: h : 2\pi b .$$

Moltiplicando le due proporzioni si ha

$$P : Q :: h : 2\pi a$$

e $P = \frac{Q h}{2\pi a}$, equazione dell'equilibrio.

Quindi è manifesto esser la Vite una macchina composta della Leva di secondo genere, e del Piano inclinato.

568. *Scolio I.* La stessa condizione dell'equilibrio ha luogo ancorchè l'asse della Vite non sia posto verticalmente, purchè però la resistenza Q agisca secondo l'asse della Vite, e la potenza P agisca secondo la tangente d'un circolo perpendicolare al detto asse. In caso diverso converrà decomporre queste due forze, e considerarne soltanto quelle componenti che agiscono nelle direzioni accennate. Le altre restano elise dagli appoggi.

569. *Scolio II.* Accrescendosi la potenza

P oltre il valore richiesto per l'equilibrio, cosicchè sollevi la testa della Vite, mentre ella fa un giro intero, la testa della Vite s'alza di tanto spazio quanto è il passo dell'elice. Di quì l'uso della Vite a strettissime spire per misurare i movimenti piccolissimi.

570. *Proposizione II.* Nell'equilibrio della Vite perpetua sta la potenza al peso, come sta il prodotto del raggio del cilindro per il passo dell'elice, al prodotto del raggio della ruota per la periferia che la potenza tende a descrivere.

Provasi analogamente all'art. 546.

571. *Proposizione III.* Agendo la potenza *P* (Fig. 50) normalmente sulla testa del Cuneo *A C B*, sta la potenza alla pressione che essa esercita perpendicolarmente su ciascun lato del cuneo, come sta la testa del cuneo a quel lato.

Siano *A*, *B* le pressioni esercitate perpendicolarmente sui lati *AC*, *BC*. Sarà (116) $P : A : B ::$ sin. *A C B*: cos. *B C Z* : cos. *A C Z* onde $P : A : B ::$ sin. *A C B* : sin. *B*: sin. *A*, o sia $P : A : B :: AB : AC : BC$. Il che etc. Di qui si vede che in pari altezza *C Z*, quanto più acuto sarà il cuneo, tanto avrà forza maggiore.

SEZIONE SECONDA

Delle Macchine nello stato prossimo al moto.

CAP. VII.

Equazione dello stato prossimo al moto.

572. Se niuna resistenza s'intromettesse, lo stato d'equilibrio sin quì considerato sarebbe ancora lo stato prossimo al moto; ogni minima diminuzione della potenza P lascierebbe cadere il peso Q, ed ogni minimo accrescimento lo solleverebbe. Or mettiamo che fra le due potenze P, Q si frapponga la resistenza o forza passiva N, la quale operi col momento Nk, mentre le potenze P, Q operano co' momenti Pa, Qb. Allora perchè la potenza P sia sul punto di sollevare il peso Q, dovrà essere $Pa = Qb + Nk$; ed affinchè il peso Q stia per discendere sforzando la potenza P, dovrà essere $Pa = Qb - Nk$. Sarà dunque l'equazion generale dello stato prossimo al moto

$$Pa = Qb \pm Nk.$$

Il segno superiore darà il massimo valore di P, ed il segno inferiore il valor minimo; in tutti i valori intermedj sussisterà l'equilibrio.

Ciò vale pei moti di rotazione; quando non si tratti che di moti progressivi, in luogo de' momenti Pa, Qb, Nk si prenderanno le forze stesse P, Q, N.

Posto ciò, si troverà facilmente l'equazion dello stato prossimo al moto per ciascuna macchina, riducendosi tutta la difficoltà a determinare esattamente la resistenza N, o il suo momento. Del che daremo un esempio, che potrà servir d'introduzione alle cose seguenti.

573. *Proposizione*. La potenza P (fig. 51) sostenga il peso Q mediante la fune POQ applicata all'arco AB d'una curva qualunque EOR. Si cerca l'equazione dello stato prossimo al moto, avendo riguardo all'attrito della fune sull'arco AB.

Sia $BA = a$, $BM = s$, $Mm = ds$, e concorrendo in K le normali KM, Km, sia $Km = r$ il raggio osculatore della curva nel punto M. Inoltre sia la tensione della fune in $M = T$, la tensione in $m = T + dT$, e la pressione sull'archetto Mm sia $= Nds$. Levando via l'elemento Mm della curva, e sostituendovi una forza $OZ = Nds$, è manifesto che sussisterebbe ancora l'equilibrio tra le due forze prossimamente eguali T, $T + dT$, e la forza Nds che fa con esse angoli eguali. Sarà dunque (125)

$T = \frac{N\,ds}{2 \text{ cos. } KOM}$. Ora riguardando KOM come un triangolo rettangolo in M, sarà cos. $KOM = \frac{MO}{KO} = \frac{ds}{2r}$. Dunque $T = Nr$.

Di più chiamando f il coefficiente dell' attrito, sarà $dT = \pm f N\,ds$. Dividendo quest' equazione per la precedente, avremo

$$\frac{dT}{T} = \pm \frac{f\,ds}{r}.$$

Nell' integrare si determinerà la costante in guisa che $s = o$ renda $T = Q$; poi si compirà l' integrale col porre $s = a$, e $T = P$.

574. *Coroll. I.* Sia EOR un arco di cerchio, onde r costante. L' equazione dello stato prossimo al moto riuscirà

$$P = Q\,e^{\pm \frac{fa}{r}}$$

575. *Coroll. II.* Supponghiamo che la fune avvolta attorno ad un cilindro abbracci la metà della circonferenza, onde sia $\frac{a}{r} = \pi$; e supponghiamo $f = 0{,}35$. Riuscirà prossimamente $e^{\frac{fa}{r}} = 3$. Quindi nello stato prossimo al moto il massimo valore di P sarà $P = 3Q$, ed il minimo $P = \frac{1}{3}Q$.

Che se la fune desse una volta e mezzo attorno al cilindro, i valori riuscirebbero

$$P = 27\,Q \quad ; \quad P = \frac{1}{27}\,Q$$

E se girasse due volte e mezzo

$$P = 243\,Q \quad ; \quad P = \frac{1}{243}\,Q$$

E così ad ogni giro di più il valor di P dovrebbe accrescersi nove volte tanto, per giungere a sollevare il peso, e potrebbe scemarsi nove volte per sostenerlo semplicemente.

Di qui si vede qual forza enorme si ricerchi per alzare il peso mediante una fune che con molte spire abbracci un cilindro immobile, e qual picciola forza sia bastante ad impedire la discesa del peso.

CAP. VIII.

Applicazione alla Leva, ed all'Asse nella Ruota.

576. PROPOSIZIONE *I.* Nella leva mobile attorno un asse, e tratta da forze parallele P, Q agenti coi bracci a, b; chiamando r il raggio dell'asse, l'equazione dello stato prossimo al moto sarà

$$P\,a = Q\,b + \frac{f\,r\,(P+Q)}{\sqrt{(1+f^2)}}.$$

Sia la potenza P (Fig. 52) sul punto di sollevare il peso Q; la risultante ER delle due forze P, Q, eguale alla loro somma, risolvasi nella tangenziale ES, e nella normale ET. Detto l'angolo $RES = m$, sarà $ES = (P+Q)$ cos. m, ed $ET = (P+Q)$ sin. m. Ora invece delle due potenze P, Q avendosi le due ES, ET, si richiederà per lo stato prossimo al moto, che la prima di queste sia precisamente eguale all'attrito; onde $ES = f . ET$, o sia cos. $m = f$ sin. m; e però sin. $m = \frac{f}{\sqrt{(1+f^2)}}$, ed $ES = f . ET = \frac{f(P+Q)}{\sqrt{(1+f^2)}}$; e questo sarà il valor dell'attrito.

Avendosi adesso le due potenze P, Q, e la resistenza $\frac{f(P+Q)}{\sqrt{(1+f^2)}}$, ed operando queste tre forze coi bracci di leva a, b, r, egli è chiaro (572) che per lo stato prossimo al moto ne risulta l'equazione di sopra annunciata.

577. *Coroll. I.* Il coefficiente f ordinariamente è sì piccolo da potersi trascurare f^2, onde l'equazione più semplice

$$Pa = Qb + (P+Q)fr$$

o sia

$$P = Q . \frac{b+fr}{a-fr}.$$

578. *Coroll. II.* Se le potenze P, Q non sono parallele, ma concorrono con angolo ϕ, invece del binomio $P+Q$ dovrà porsi nelle equazioni precedenti il valore della risultante, che sarà (24) $=\sqrt{(P^2+2PQ\cos.\phi+Q^2)}$.

579. *Proppsizione II.* Per l'Asse nella Ruota, se le potenze P, Q siano parallele, e sia a il raggio della ruota, b quello del cilindro, r quello dell'asse di rotazione; l'equazione dello stato prossimo al moto, avendo riguardo all'attrito, ed alla rigidezza della fune, sarà

$$Pa = Qb + (P+Q)fr + b(\mu+\nu Q)$$

Qui l'ultimo termine viene dalla rigidezza della fune, la qual resistenza si esprime (431) per $\mu+\nu Q$, ed agisce col braccio b. Del resto l'equazione ricavasi come qui sopra (576. 577).

580. *Scolio I.* Quando la potenza P non è applicata ad un punto solo della circonferenza della ruota, ma distribuita a più punti diametralmente fra loro opposti, siccome per lo più avviene nell'Argano, allora essa potenza non influisce punto sull'attrito, e l'equazion diventa

$$Pa = Q(b+fr)+b(\mu+\nu Q).$$

581. *Scolio II.* Servono tutte queste equazioni a quello stato nel quale la potenza è prossima a sollevare il peso; che se volessero adattarsi allo stato nel quale il peso

stia per superare la potenza, basterebbe cangiare il segno ai coefficienti delle resistenze f, μ, ν. Il che dovrà pure avvertirsi nelle applicazioni susseguenti.

CAP. IX.

Applicazione alla Troclea, ed alla Taglia.

582. PRIMIERAMENTE per la semplice Troclea è manifesto che l'equazione dello stato prossimo al moto è la stessa che per l'Asse nella Ruota (579) facendovi $b = a$. Passando ora alla Taglia, agevoleremo il calcolo col supporre 1.° che tutti i tratti della fune siano paralleli. 2.° che tutti i raggi delle troclee siano eguali fra loro, come pure quelli degli assi. 3.° che essendo f molto piccolo, possa farsi $\sqrt{(1+f^2)} = 1$. 4.° che la rigidezza della fune sia presso a poco proporzionale alla tensione, onde possa farsi $\mu = 0$.

583. *Proposizione*. Sia ciascuno de' raggi delle troclee $= a$, ciascuno de' raggi degli assi $= r$, il numero de' tratti della fune che tirano le troclee mobili $= k$. Ponendosi per brevità

$$\frac{a - fr}{a(\nu + 1) + fr} = A$$

l'equazione dello stato prossimo al moto sarà

$$P = Q \cdot \frac{A^k (A - 1)}{A^k - 1}.$$

Si esprimano le tensioni de' tratti della fune colle lettere t, t', t'' ..... apposte nella Fig. 45, e fra le due tensioni t, t' si avrà l'equazione (582. 579)

$$t\,a = t'\,a + (t + t')\,f\,r + a\,v\,t'$$

dalla quale si trae $t' = A\,t$. Similmente si troverà

$$t'' = A\,t' = A^2\,t\,;\ t''' = A\,t'' = A^3 t\,;\ \text{etc.}$$

Quindi l'ultima tensione, o sia quella della fune che immediatamente vien tratta dalla potenza, si troverà $= A^k\,t$, e la somma di tutte le altre sarà

$$t\left(1 + A + A^2 + A^3 \ldots + A^{k-1}\right)$$

o sia

$$= t\,\frac{A^k - 1}{A - 1}.$$

Ora l'ultima tensione è eguale alla potenza P, e la somma di tutte le altre è uguale al peso Q. Dunque $P : Q :: A^k : \frac{A^k - 1}{A - 1}$; onde etc.

584. *Scolio*. Annullandosi l'attrito, e la rigidezza della fune, viene $A = 1$, il che darebbe $P = Q \cdot \frac{0}{0}$; Ma determinato coi no-

ti metodi il valore di quella frazione $\frac{0}{0}$, torna $P = \frac{Q}{k}$, siccome dev'essere (559).

CAP. X.

Applicazione al Piano inclinato, ed alla Vite.

585. PROPOSIZIONE *I.* Nel Piano inclinato, ritenendo le denominazioni dell'art. 563, l'equazione dello stato prossimo al moto riesce

$$P = Q \cdot \frac{\cos. m + f \sin. m}{\cos. n - f \sin. n}$$

Poichè dalla risoluzione delle forze P, Q (563) nasce la forza in direzione parallela al piano $= P \cos. n - Q \cos. m$, e la forza normale al piano $= P \sin. n + Q \sin. m$, onde l'attrito $= fP \sin. n + fQ \sin. m$. Dunque dovrà essere

$P \cos. n - Q \cos. m = fP \sin. n + fQ \sin. m$.

586. *Coroll. I.* Traendo la potenza orizzontalmente, verrà $P = Q \cdot \frac{1 + f \text{ tang. } m}{\text{tang. } m - f}$; e traendo la potenza parallelamente al piano, verrà $P = Q (\cos. m + f \sin. m)$.

Sono questi i valori che mettono la po-

tenza in procinto di sollevare il peso Q. Quelli poi che bastano ad impedir semplicemente la discesa del peso, sono gli stessi, cangiandovi il segno di f. Si confronti l'art. 494.

587. *Coroll. II.* Quì la direzione più vantaggiosa per la potenza che vuole alzare il peso Q non è più la direzione parallela al piano, ma bensì quella che diverge dal piano con angolo che ha per tangente f. Poichè differenziando il valore di P (585) col porvi variabile l'angolo n, e facendo $dP=0$, trovasi tang. $n = -f$.

Che se la potenza dovesse soltanto trattenere la caduta del peso, verrebbe tang. $n = f$; onde la direzione della potenza dovrebbe convergere col piano collo stesso angolo.

588. *Coroll. III.* Bene spesso avviene che la potenza strascini il peso sul piano inclinato mediante una fune che passa per una Troclea fissa. Ed allora l'equazione dello stato prossimo al moto sarà quella dell'art. 579, facendovi (582) $b = a$, ed in luogo di Q ponendovi (585),

$$Q \cdot \frac{\cos. m + f \sin. m}{\cos. n - f \sin. n}$$

589. *Proposizione II.* Nella Vite, ritenendo le denominazioni dell'art. 567, l'equazione dello stato prossimo al moto riesce

$$P = Q \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{h + 2f\pi b}{2\pi b - fh}$$

Ritornando sulle traccie del citato articolo, avremo tuttavia

$$P : X :: 2\pi b : 2\pi a .$$

Passando poscia a paragonar fra loro le forze X e Q, sarà adesso (586)

$$X : Q :: 1 + f \text{ tang. } m : \text{tang. } m - f$$

o sia, poiche (565) tang. $m = \frac{2\pi b}{h}$,

$$X : Q :: h + 2f\pi b \ : \ 2\pi b - fh$$

Moltiplicando questa proporzione per la precedente, si otterrà l'annunciata equazione.

SEZIONE TERZA

Delle Macchine in moto.

CAP. XI.

Del moto accelerato delle macchine.

590. Accresciuta la potenza oltre il limite dello stato prossimo al moto, essa solleva il peso con moto di vario genere secondo la varia natura e della potenza, e delle resistenze che al movimento della macchina fanno contrasto. E già perchè il mo-

to si perpetui rendesi neces-ario per cagion delle resistenze, che la potenza sia una forza continuamente applicata, o sia (181) forza acceleratrice. Se questa forza acceleratrice è costante, e costante pur si mantiene la resistenza, girerà la macchina e solleverà il peso con moto equabilmente accelerato. Se poi nel crescere la velocità o scemi la forza, o s'aumenti la resistenza, il moto s'accelererà nel principio, ma nel progresso renderassi uniforme.

Proponghiamoci da prima un peso Q da sollevarsi mediante un Asse nella Ruota. Il motore della macchina sia un altro peso P pendente da una fune avvolta alla periferia della ruota stessa. Sarà questo il caso nel quale la forza acceleratrice del motore è costante.

591. *Proposizione*. Sia P la massa del peso motore, Q la massa del peso da sollevarsi; a, b i rispettivi raggi o bracci di leva; S il momento d'inerzia della macchina riferito all'asse di rotazione; e la gravità acceleratrice esprimasi per l'unità. Scenderà il peso P e salirà il peso Q con moto equabilmente accelerato, e chiamando φ, φ' le rispettive forze acceleratrici, sarà

$$\varphi = a \cdot \frac{Pa - Qb}{S + Pa^2 + Qb^2}; \quad \varphi' = b \cdot \frac{Pa - Qb}{S + Pa^2 + Qb^2}$$

Dim. Sia z la velocità angolare del siste-

ma; sarà (291) $\frac{dz}{dt}$ eguale al momento della forza sollecitante diviso pel momento d' inerzia. Ora essendo Pa il momento del motore P, e Qb il momento del peso Q, sarà $Pa - Qb$ il total momento della forza sollecitante. Quanto al momento d' inerzia, siccome le masse P, Q ad ogni istante si muovono con quella velocità con cui girano le estremità de' rispettivi raggi a, b, così ponno intendersi concentrate nelle estremità di que' raggi; onde i loro momenti d' inerzia saranno Pa^2, Qb^2, e sarà $S + Pa^2 + Qb^2$ il momento d' inerzia di tutto il sistema. Dunque $\frac{dz}{dt} = \frac{Pa - Qb}{S + Pa^2 + Qb^2}$, che pongo per brevità $= M$.

Sarà dunque la velocità angolare $z = \int M dt$. E se chiamiamo u, u' le velocità negli estremi de' raggi a, b, o sia le velocità delle masse P, Q, sarà (279)

$$u = az = a\int M dt \; , \; u' = bz = b\int M dt$$

onde (184) $\varphi = \frac{du}{dt} = aM$; $\varphi' = \frac{du'}{dt} = bM$.

Qui essendo P costante, lo sarà anche M, ond' è palese essere il moto uniformemente accelerato.

592. *Coroll. I* Chiedendosi il valore da darsi al raggio a affinchè il peso sia solle-

vato colla massima velocità, questo si avrà dall'equazione

$$d.\frac{Pa-Qb}{S+Pa^2+Qb^2}=0$$

differenziando nel supposto di a variabile.

E siccome al variare di a varia anche S, così prima di differenziare converrà porre in luogo di S il suo valore espresso per a. Potremo tuttavia dispensarcene quando S possa trascurarsi rimpetto agli altri termini del denominatore, oppure quando S possa prendersi per costante, attesochè cangi pochissimo al cangiare di a.

593. *Coroll. II.* Nella Troclea fissa abbiamo $a=b$, e posta $2T$ la massa della troclea, riesce (271) $S=Ta^2$. Scenderà pertanto il peso P, e salirà il peso Q con pari forza acceleratrice, che sarà $=\frac{P-Q}{T+P+Q}$. Di qui l'uso della macchinetta di Atwood per verificare le leggi del moto de' gravi.

594. *Coroll. III.* Se il peso Q non sale verticalmente, ma per un piano inclinato, serviranno tuttavia le formole precedenti, se non che nel numeratore in luogo di Q si dovrà porre (563) $Q.\frac{\cos. m}{\cos. n}$.

595. *Coroll. IV.* Finalmente se vogliasi tener conto delle resistenze dell'attrito, e

della fune, serviranno ancora le formole dell' art. 591, se non che nel numeratore in luogo di Qb dovrà porsi (579)

$$Qb + (P + Q) fr + b(\mu + \nu Q)$$

Che se il peso Q fosse tratto su per un piano comunque inclinato, dopo l'accennata sostituzione, converrà nel numeratore cangiar Q in

$$Q \cdot \frac{\cos. m + f \sin. m}{\cos. n - f \sin. n}$$

Siccome poi i coefficienti delle resistenze f, μ, ν ponno aversi per costanti (418. 427. 431) così egli è chiaro che il moto resta sempre uniformemente accelerato.

CAP. XII.

Del moto uniforme delle macchine.

596. Rallentasi l'accelerazione della macchina, e il moto tende all'uniformità, allorchè nel processo del moto o scema la forza acceleratrice, o cresce la resistenza. Si ha l'esempio del primo caso nelle macchine mosse per forza animata; la qual forza (372) viene scemando a misura che il moto s'affretta. Si ha l'esempio del secondo caso nelle macchine guernite d'un volante, che colle sue palette battendo l'aria in-

contra resistenza tanto maggiore (204) quanto è maggiore la velocità.

597. *Proposizione*. Posti gli stessi dati dell' art. 591, se invece del peso costante P serva per motore una forza F, funzione qualunque della velocità, salirà il peso Q con moto accelerato, e sarà la forza acceleratrice

$$\Phi' = b \cdot \frac{Fa - Qb}{S + Fa^2 + Qb^2}.$$

Dimostrasi come all' art. 591.

598. *Coroll. I.* Conosciuta la forza Φ', le note equazioni $\Phi' dt = du$, $\Phi' ds = u du$ danno a conoscere gl' incrementi della velocità, e tutti gli accidenti del moto. E se F decresce col crescere della velocità, anche la forza acceleratrice Φ' andrà scemando; onde si scorge che il moto s' accelera in principio, ma va poi tendendo all' uniformità.

599. *Coroll. II.* Il moto diviene uniforme, tostochè diventa $\Phi' = 0$, o sia $Fa = Qb$. Dal che apparisce che la forza richiesta nel motore per conservar la macchina nello stato permanente di moto equabile è quella stessa che richiedesi per mantenerla in equilibrio: il che altronde è palese per se medesimo.

600. *Coroll. III.* La stessa equazione $Fa = Qb$ ci farà nota la velocità equabile

e permamente della macchina. Per darne esempio supponghiamo essere F la forza d'un uomo, espressa per alcuna delle tre formole, che già (394) proponemmo.

Posto il valore di F nell' equazione $Fa = Qb$, ne avremo, secondo le varie ipotesi

$$1.^a \quad v = h\left(1 - \frac{bQ}{ag}\right)$$

$$2.^a \quad v = h\sqrt{\left(1 - \frac{bQ}{ag}\right)}$$

$$3.^a \quad v = h\left(1 - \sqrt{\frac{bQ}{ag}}\right)$$

Sarà questa la velocità equabile del punto d' applicazione del motore F; e moltiplicandola per $\frac{b}{a}$ si avrà la velocità con cui s'alza il peso Q.

601. *Coroll. IV.* Volendosi tener conto dell' attrito e della rigidezza della fune, si farà come all' art. 595, onde sarà l'equazione dello stato permanente

$$Fa = Qb + (F + Q)fr + b(\mu + \nu Q).$$

E se la macchina non levi di peso la massa Q, ma la strascini per un piano, in luogo di Q dovrà poi farsi la sostituzione ivi (595) insegnata.

602. *Coroll. V.* Generalmente se sia Nk

la somma de' momenti delle resistenze, l'equazione del moto equabile sarà $Fu=Qb+Nk$. Ove se F o anche N siano funzioni della velocità, converrà porvi i loro valori espressi per la velocità d'un determinato punto della macchina; ed allora l'equazione stessa ci darà a conoscere la velocità che al giro equabile e permanente della macchina compete.

CAP. XIII.

Della disposizione più vantaggiosa delle macchine.

603. Nelle macchine che sollevano un peso con moto equabile *l'effetto della macchina* si misura dal prodotto del peso sollevato per la sua velocità. Similmente *l'effetto della forza* motrice misurasi (383) dal prodotto di essa forza per la sua velocità; vale a dire dal prodotto del peso equivalente allo sforzo che fa il motore, per la velocità colla quale egli cammina.

604. *Proposizione I.* Sia un Asse nella Ruota, e il motore F camminando con velocità equabile v sollevi il peso Q con velocità u. Sarà l'effetto della macchina eguale a quello della forza.

Poichè pel moto equabile converrà essere

(599) $Fa = Qb$. Ma $a : b :: v : u$. Dunque $Fv = Qu$. Ora Qu è l'effetto della macchina, Fv l'effetto della forza.

605. *Scolio*. Scorgesi che la potenza sta al peso come la velocità del peso a quella della potenza. Questa proporzione ha luogo così nel moto equabile come nell'equilibrio, se non che nel moto si paragonano le velocità attuali, nell'equilibrio le virtuali. E vale non solo per l'Asse nella Ruota, ma per ogni macchina immaginabile. Già scorrendo per tutti i casi delle macchine per noi descritte, si ravvisa in tutti quella proporzione, la quale fu poi generalizzata per induzione, finchè in ultimo (*a*) è riuscito dimostrarla universalmente. Ma questa dimostrazion generale qui non può trovar luogo.

606. *Coroll. I.* L'effetto d'una forza applicata a trasportare equabilmente un peso non cresce punto, qualunque siasi la macchina che vi si adopri. Vana è dunque la volgare opinione che la macchina addoppi o moltiplichi l'effetto della forza. In che veramente consista l'utilità delle macchine si dirà fra poco.

607. *Coroll. II.* Se tengasi conto delle resistenze, essendo l'equazione dello stato per-

(a) *Laplace Mec. Cel. Liv. I. num.* 14.

manente (602) $Fa = Qb + Nk$, ovvero $Fv = Qu + \frac{Nku}{b}$ scorgesi che l'effetto della macchina Qu non eguaglia l'effetto della forza Fv. Quindi tanto è lontano che la macchina possa aumentar l'effetto della forza, che anzi lo scema tanto più quanto più soggiace agli attriti, e ad altre resistenze.

608. *Coroll. III.* Allorchè la forza F decresce col crescere della velocità, havvi tal valore della forza (396) che rende massimo il suo effetto Fv. Questo stesso valore adunque renderà massimo anche l'effetto della macchina. Di qui nasce la ricerca del modo di disporre la macchina col maggior vantaggio.

609. *Proposizione II.* Dato il peso Q da sollevarsi equabilmente colla forza F funzion data della velocità, determinare il rapporto $\frac{b}{a}$ del raggio del cilindro a quello della ruota così che ottengasi il massimo effetto, o viceversa.

Prima per l'equazione (396) $d.Fv = o$ si cercherà il valore di F conveniente per l'effetto massimo. Poscia si porrà questo valore nell'equazione $Fa = Qb$, onde dall'uno de' due elementi Q, $\frac{b}{a}$ troveremo l'altro.

Che se intervenissero resistenze, si farà uso dell'equazione $Fa = Qb + Nk$.

610. *Coroll. I.* Sia F la forza d'un uomo; il suo valore per l'effetto massimo sarà (396) l'un de' tre $\frac{1}{2}g$, $\frac{2}{3}g$, $\frac{4}{9}g$. Quindi scioglierà il Problema l'una di queste tre equazioni

$ga = 2Qb$; $2ga = 3Qb$; $4ga = 9Qb$

secondo si adotta una o l'altra delle tre ipotesi (394).

611. *Coroll. II.* Se non un solo agente dotato di forza F, ma più agenti in numero n fossero applicati alla ruota, l'equazion sarebbe $nFa = Qb$. E quì dei tre elementi n, Q, $\frac{b}{a}$ dati due qualunque, potrà determinarsi il terzo nel modo il più vantaggioso.

612. *Coroll. III.* L'utilità di questa Teoria mi fa credere opportuno il dichiararla con un esempio. Adottiamo per la forza permanente d'un uomo l'espressione

$F = g\left(1 - \frac{v}{h}\right)^2$ e sia $g =$ chil. 21, $h =$ metr. 1,95.

E con un Argano ove il raggio della Ruota superi dodici volte quello del cilindro dovendo sollevarsi una mole del peso chil. 2800, voglia sapersi qual numero n d'ope-

raj torni meglio adoperare intorno alla Ruota. L'equazione $4ngaa = 9Qb$ darà $n = 25$.

È facile l'assicurarsi esser questo in realtà il numero più vantaggioso. Poichè fatto $n = 25$ viene

$$F = \frac{Qb}{na} = 9{,}33; \text{ ed } v = h\left(1 - \sqrt{\frac{F}{g}}\right) = 0{,}65.$$

Sarà dunque l'effetto d'ognuno $= 6{,}066$; e l'effetto della macchina $= 25 . 6{,}066 = 151{,}65$.

Or si provi qualunque altro numero d'operaj; l'effetto di ciascuno tornerà sempre minore di 6,066; e l'effetto della macchina avrà sempre minor proporzione al numero degli operaj. Se per esempio si volessero crescere gli operaj sino a 100, si troverà che l'effetto di ciascuno non arriva alla metà del precedente. E così col quadruplicare gli agenti neppur vien che si raddoppi l'effetto della macchina.

CAP. XIV.

Dei veri vantaggi delle Macchine.

613. Il falso concetto che sogliono formarsi gl'imperiti della natura e del potere delle macchine spesse volte porge alimento a vane lusinghe, ed a pregiudicievoli inganni. Uno de' più comuni si è quello di riguardare le macchine come valevoli ad ac-

crescere e moltiplicare la forza degli agenti, il che non è sempre vero. A formarci una giusta idea dell'ajuto che può sperarsi dalle Macchine, noi riguardando agli usi più comuni delle medesime, le distingueremo in due classi: quelle destinate semplicemente a sostenere un peso, e quelle destinate a tirarlo, o sollevarlo equabilmente.

614. Nelle macchine della prima classe tanto l'effetto della macchina, quanto l'effetto immediato della forza non può desumersi che dalla quantità del peso sostenuto.

Ciò posto egli è evidente che la macchina accresce l'effetto della forza; giacchè p. e. una forza di chil. 10 sosterrà colla leva chil. 100, sempre che il braccio della forza sia decuplo di quello del peso.

615. Si chiederà come mai la forza possa produrre un effetto tanto maggior di se stessa? Se ben si consideri, vedremo che la forza 10 non sostiene realmente tutto il peso 100, ma soltanto la decima parte. Supponghiamo la leva di secondo genere: la forza 100 si risolve in due; l'una = 90 che agisce sul fulcro, l'altra = 10 che agisce sul punto d'applicazione della potenza. La prima è tutta sostenuta dall'appoggio; la potenza sostiene solamente la seconda. Archimede non domandava che un punto fisso per tenere equilibrato il globo terracqueo.

Ben dice Carnot (*a*), se egli l'avesse trovato, non egli veramente, ma sibbene il punto fisso avrebbe in realtà sostenuto la Terra.

616. Nelle Macchine della seconda classe tanto l'effetto della macchina quanto quello della forza non può desumersi semplicemente dalla quantità del peso sollevato; altrimenti la misura dell'effetto riuscirebbe del tutto vaga e indeterminata. Infatti qualunque piccola forza può trasportare un peso quanto si voglia enorme (*b*) tanto solo che si conceda potersi dividere questo peso e trasportarne un pezzo per volta. Per lo che convien mettere in conto anche il tempo nel quale la forza è capace di trasportare il peso per un dato spazio, o sia la velocità del trasporto. Egli è perciò che l'effetto misurasi (603) dal prodotto del peso per la velocità.

Or ciò posto, abbiamo già mostrato (604) che la macchina non accresce l'effetto della forza. Se l'uomo collo sforzo di chil. 10 solleva per via d'una macchina un peso di chil. 100, egli si muove con velocità decupla del peso, e fa lo stesso come se immediatamente operando trasportasse quei cento

(a) *Principes de l'equil. et du mouv. pag.* 238.
(b) *Galileo Op. Tom. I. pag.* 553.

chilogrammi in dieci viaggi, caricandosi di 10 chil. per volta. In somma quel che si guadagna nella quantità del peso trasportato, si perde nella velocità, e l'effetto si rimane lo stesso.

617. Fra le due notate classi di macchine havvi dunque questa caratteristica differenza, che le prime aumentano l'effetto della potenza, non così le seconde.

Havvi un altra differenza non men rimarcabile in ordine alle resistenze d'attrito, delle funi, ed altre. Nelle macchine della prima classe, queste resistenze sono tutte in vantaggio della potenza; e sostentano anch' esse la loro parte del peso, onde tanto meno rimane alla potenza da reggerne. Per lo contrario nelle macchine della seconda classe, le resistenze tornano tutte a scapito della potenza; e forman parte del peso da vincersi, onde si esige per questo capo una forza maggiore di quella che si richiederebbe coll' immediata applicazione della potenza.

618. Intese queste cose, egli è facile ora il ravvisare il vero scopo e la vera utilità delle macchine. Servono le macchine della prima classe ad accrescere l'effetto della potenza: e ciò fanno col compartir convenientemente il peso fra la potenza, e l'appoggio.

Servono le macchine della seconda classe non già ad accrescere l'effetto della forza nella sua quantità, ma a modificarne come più piace la qualità; e ciò fanno nel modo seguente. Essendo l'effetto della macchina il prodotto del peso per la sua velocità, noi potremo accrescere a piacimento l'uno dei due fattori, purchè si diminuisca l'altro in proporzione. E così potremo muovere per via di macchina un peso enorme, purchè siam contenti di moverlo lentamente; o viceversa movere un peso con grandissima velocità, purchè sia un picciol peso; laddove coll'immediata applicazione della forza non potremmo guari oltrepassare certi limiti nè di velocità nè di peso.

619. Un altra utilità delle Macchine è quella di poter applicare al trasporto o al sostentamento de' pesi ancor quelle forze che immediatamente non potrebbono applicarvisi, e con quella direzione che torna più comoda alla potenza. L'urto d'una corrente, o la forza d'una bestia non potrebbe usarsi a trarre acqua da un pozzo, o dalla cava le pietre, se non fosse trasmessa da una macchina; e l'uomo stesso caverà acqua più agiatamente per via d'una troclea, che non farebbe traendo la secchia verticalmente all'insù.

620. Quantunque la scelta della macchina

D 38803

per un dato oggetto e la sua più acconcia disposizione non possano ridursi a precetti, pur gioverà notare alcune poche generali avvertenze.

Prima. Nelle macchine destinate al trasporto di pesi giova ridurre al minimo possibile gli attriti, e le altre resistenze; non così in quelle destinate al semplice sostentamento di pesi. E perciò generalmente parlando, nel primo caso son preferibili le macchine semplici, nel secondo le composte.

Seconda. Quando la forza decresce nel crescere la velocità, conviene disporre la macchina in guisa che la forza di ciaschedun agente si eserciti col maggiore vantaggio; il che si farà nel modo di sopra spiegato (609).

Terza. Generalmente poi si conviene aver cura che la forza s'impieghi tutta nel produrre l'effetto inteso, e niuna parte se ne disvii in effetti stranieri al vero oggetto della macchina. Così nella leva se la potenza agisse obbliquamente al suo braccio, una parte di essa si perderebbe nel produrre uno sforzo contro del punto d'appoggio, con inutile consumo di forza in puro detrimento della macchina.

609836 (1)

TAVOLA DE' CAPITOLI

LIBRO I.

Dell' Equilibrio.

CAP.		pag.
I.	*Nozioni preliminari.*	1
II.	*Della composizione delle forze.*	3
III.	*Formole che esprimono la risultante, date le componenti, e viceversa.*	7
IV.	*Composizione delle forze parallele.*	12
V.	*Risoluzione d' una forza in altre ad essa parallele.*	15
VI.	*Del Centro delle forze parallele.*	17
VII.	*Del Centro di Gravità.*	22
VIII.	*Ricerca del centro di gravità delle linee e figure più semplici.*	24
IX.	*Formole pel centro di gravità delle linee, e de' piani.*	28
X.	*Formole pel centro di gravità delle superficie, e de' solidi di rivoluzione.*	30
XI.	*Uso del centro di gravità per la misura delle superficie, e de' solidi di rivoluzione.*	32

XII. *Modo di trovare per approssimazione le superficie, le solidità e i centri di gravità delle figure, delle quali non abbiasi l' equazione.* 34

XIII. *Dell' Equilibrio delle forze concorrenti in un punto.* 38

XIV. *Del Momento di rotazione.* 39

XV. *Equilibrio d' un sistema di forma invariabile.* 43

XVI. *Pressioni sugli appoggi d' un sistema rigido equilibrato.* 46

XVII. *Equilibrio d' un sistema rigido animato da forze parallele.* 49

XVIII. *De' sistemi di forma variabile.* 54

XIX. *Del Poligono funicolare.* 57

XX. *Del Poligono funicolare teso da forze parallele.* 59

XXI. *Della Catenaria.* 62

XXII *De' Poligoni di lati inflessibili, e delle curve d' equilibrio degli Archi, e delle Cupole.* 68

XXIII. *Degli Archi di grossezza finita. Prima condizione dell' equilibrio.* 73

XXIV. *Seconda condizione dell' equilibrio.* 77

XXV. *Delle Cupole di grossezza finita.* 80

LIBRO II.

Del Moto.

I. *Del Moto equabile, e del moto vario.* 84

II. *Del moto equabilmente accelerato o ritardato.* 86
III. *Del moto verticale de' gravi.* 89
IV. *Moto de' gravi ne' mezzi resistenti.* 90
V. *Del moto curvilineo.* 93
VI. *De' gravi projetti.* 95
VII. *Via de' projetti nell' aria.* 98
VIII. *Del moto sopra una curva data.* 102
IX. *Discesa de' gravi pei piani inclinati.* 107
X. *Del Pendolo semplice.* 109
XI. *Moto de' pendoli ne' mezzi resistenti.* 114
XII. *Del Moto d' un sistema.* 121
XIII. *Del Momento d' inerzia.* 123
XIV. *Moto d' un sistema rigido libero.* 129
XV. *Moto d' un sistema rigido attorno un asse immobile.* 137
XVI. *Del Centro di percossa.* 139
XVII. *Del Pendolo composto, e del Centro d' oscillazione.* 142
XVIII. *Della Percossa.* 146
XIX. *Della percossa de' corpi elastici.* 148
XX. *Della percossa eccentrica.* 151
XXI. *Della percossa obbliqua.* 154

LIBRO III.

Delle Forze moventi e resistenti.

I. *Qualità meccaniche de' corpi.* 156
II. *Della Gravità.* 157

III.	*Dell' Elasticità :*	162
IV.	*Elasticità dell' aria .*	164
V.	*Elasticità de' vapori acquei .*	169
VI.	*Forza della polvere d' archibugio .*	176
VII.	*Forza degli agenti animati .*	180
VIII.	*Della forza assoluta dell' uomo .*	183
IX.	*Della forza permanente dell' uomo .*	187
X.	*Del rapporto tra la forza e la velocità .*	194
XI.	*Della forza delle bestie :*	197
XII.	*Dell' Attrito .*	199
XIII.	*Seconda specie d' attrito .*	207
XIV.	*Terza specie d' attrito .*	209
XV.	*Della rigidezza de' canapi :*	212
XVI.	*Resistenza assoluta de' solidi .*	215
XVII.	*Resistenza rispettiva de' solidi .*	221
XVIII.	*Resistenza de' solidi sostenuti nelle estremità .*	228
XIX.	*Resistenza de' solidi alla compressione .*	234

LIBRO IV.

Dell' Equilibrio delle Fabbriche .

I.	*Nozioni generali .*	240
II.	*Dell' equilibrio de' piedritti .*	242
III.	*Rinfianchi de' piedritti .*	247
IV.	*Della spinta de' terrapieni .*	251
V.	*Dell' equilibrio e della spinta de' Poligoni .*	255

VI. *Dell' equilibrio degli Archi, e delle Cupole.* 261
VII. *Saggio d' un altro metodo per esaminare la fermezza delle Volte.* 266
VIII. *Della fermezza de' modelli.* 271

LIBRO V.

Delle Macchine.

SEZIONE I. Delle Macchine in equilibrio.

I. *Della Leva.* 276
II. *Varie maniere e combinazioni di Leve.* 279
III. *Dell' Asse nella Ruota.* 283
IV. *Della Troclea, e della Taglia.* 285
V. *Del Piano inclinato.* 289
VI. *Della Vite, e del Cuneo.* 290

SEZIONE II. Delle Macchine nello stato prossimo al moto.

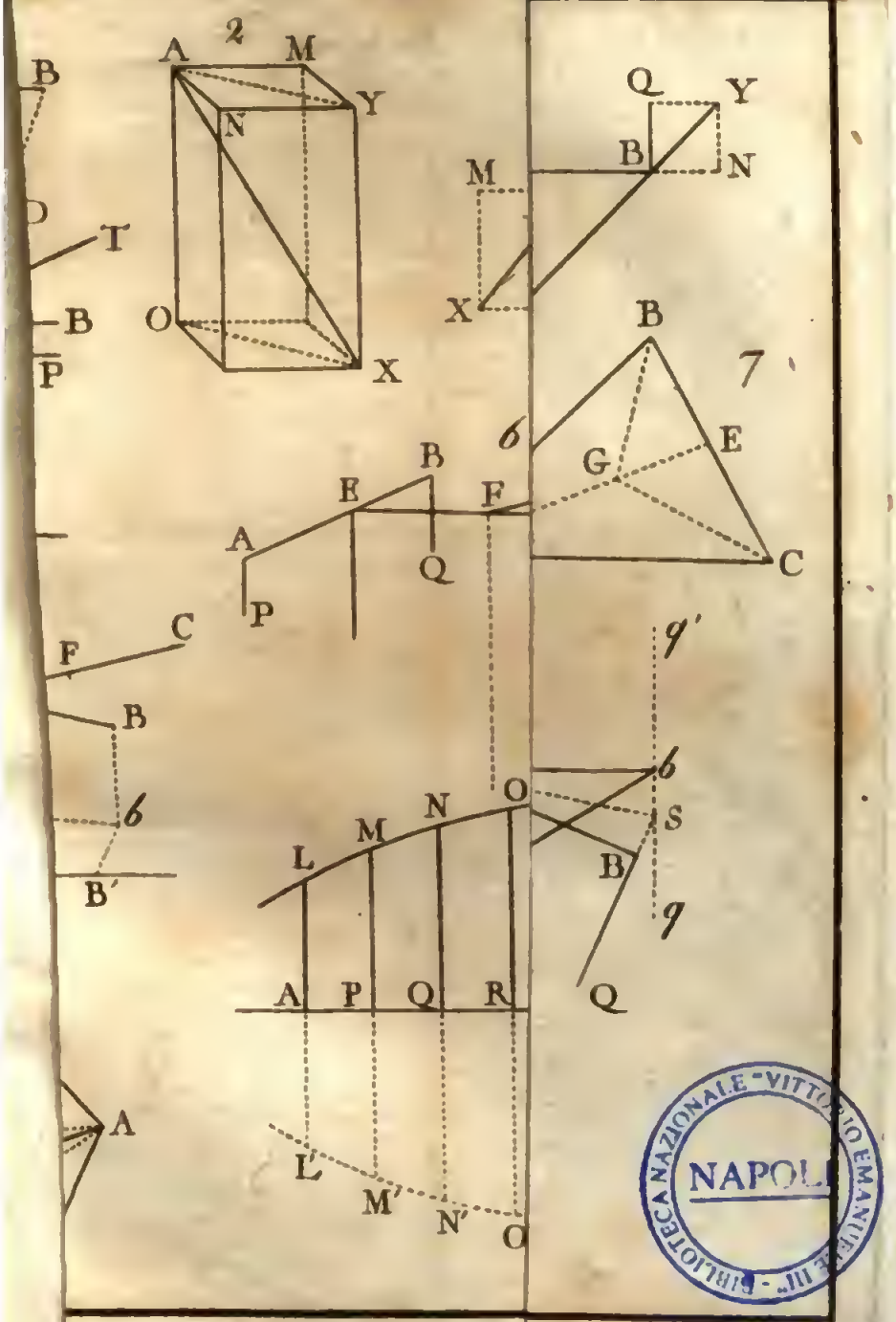
VII. *Equazione dello stato prossimo al moto.* 294
VIII. *Applicazione alla Leva, ed all' Asse nella Ruota.* 297
IX. *Applicazione alla Troclea, ed alla Taglia.* 300
X. *Applicazione al Piano inclinato, ed alla Vite.* 302

SEZIONE III. Delle Macchine in moto.

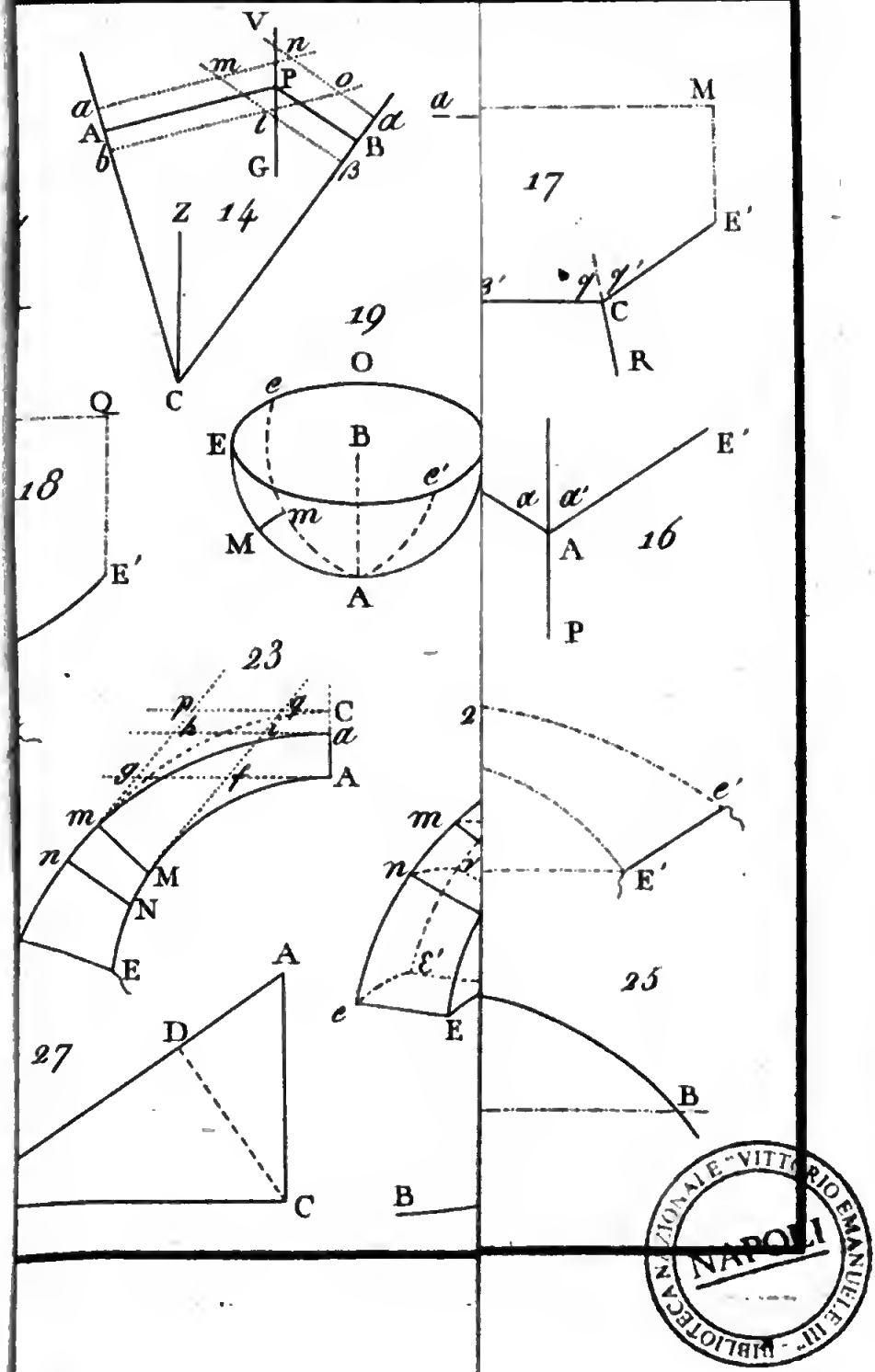
XI. *Del moto accelerato delle Macchine.* 304
XII. *Del moto uniforme delle Macchine.* 308
XIII. *Della disposizione più vantaggiosa delle macchine.* 311
XIV. *Dei veri vantaggi delle macchine.* 315

CORREZIONI

pag.	lin.		leggi
97	9	tang. f	z tang. f
101	1	cos. f	cos. f^2
226	9	$A\,m\,e$	$A\,m\,c$
237	3	$c\,.\,A\,B$	$c\,,\,A\,B$
ib.	6	$\frac{a^2 b}{c}$	$\frac{a^2 b}{c^2}$
ib.	9	$\frac{E\pi}{c^2}$	$\frac{E\pi^2}{c^2}$
250	14	$P\,Q = p\,.$	$P\,Q = q\,.$
257	10	P tang. $m\,(P+Q)$ tang. n leggi P tang. $m = (P+Q)$ tang. n	
260	24	$A\,M\,.\,M\,.\,M\,E$	$A\,M\,.\,M\,E$
270	24	centro	cemento
274	4	$P\,x$	$P\,x^2$
ib.	6	$P\,x$	$P\,x^2$
282	12	$T+B$	$T+R$

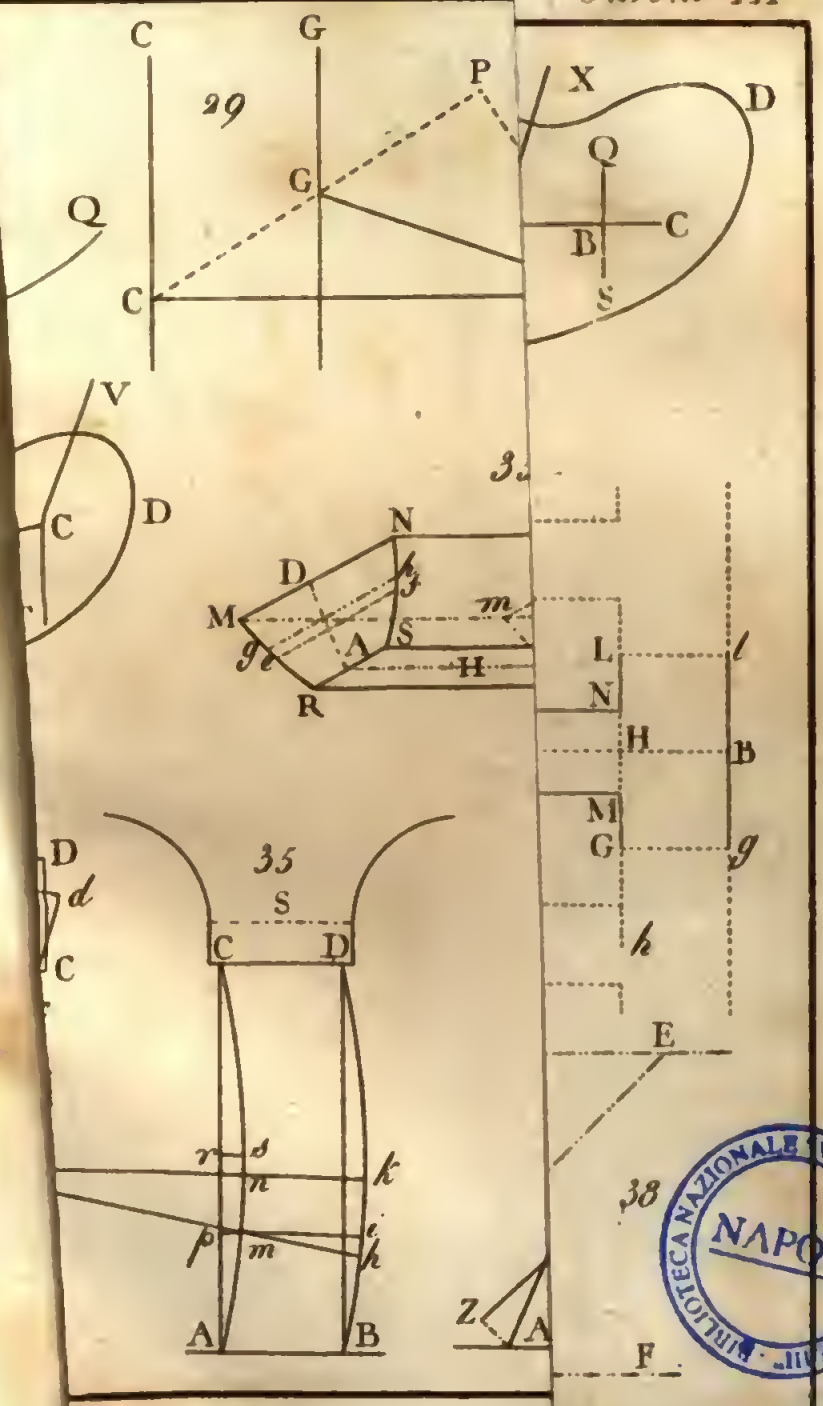


BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI



BIBLIOTECA NAZIONALE - VITTORIO EMANUELE III - NAPOLI

Tavola III



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI

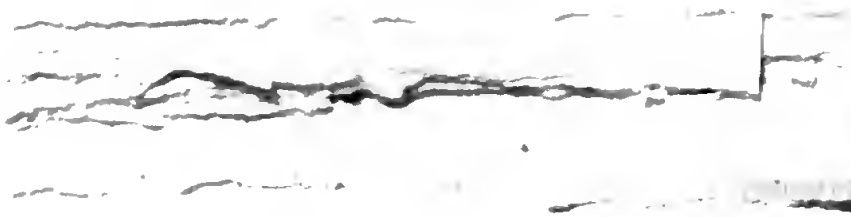
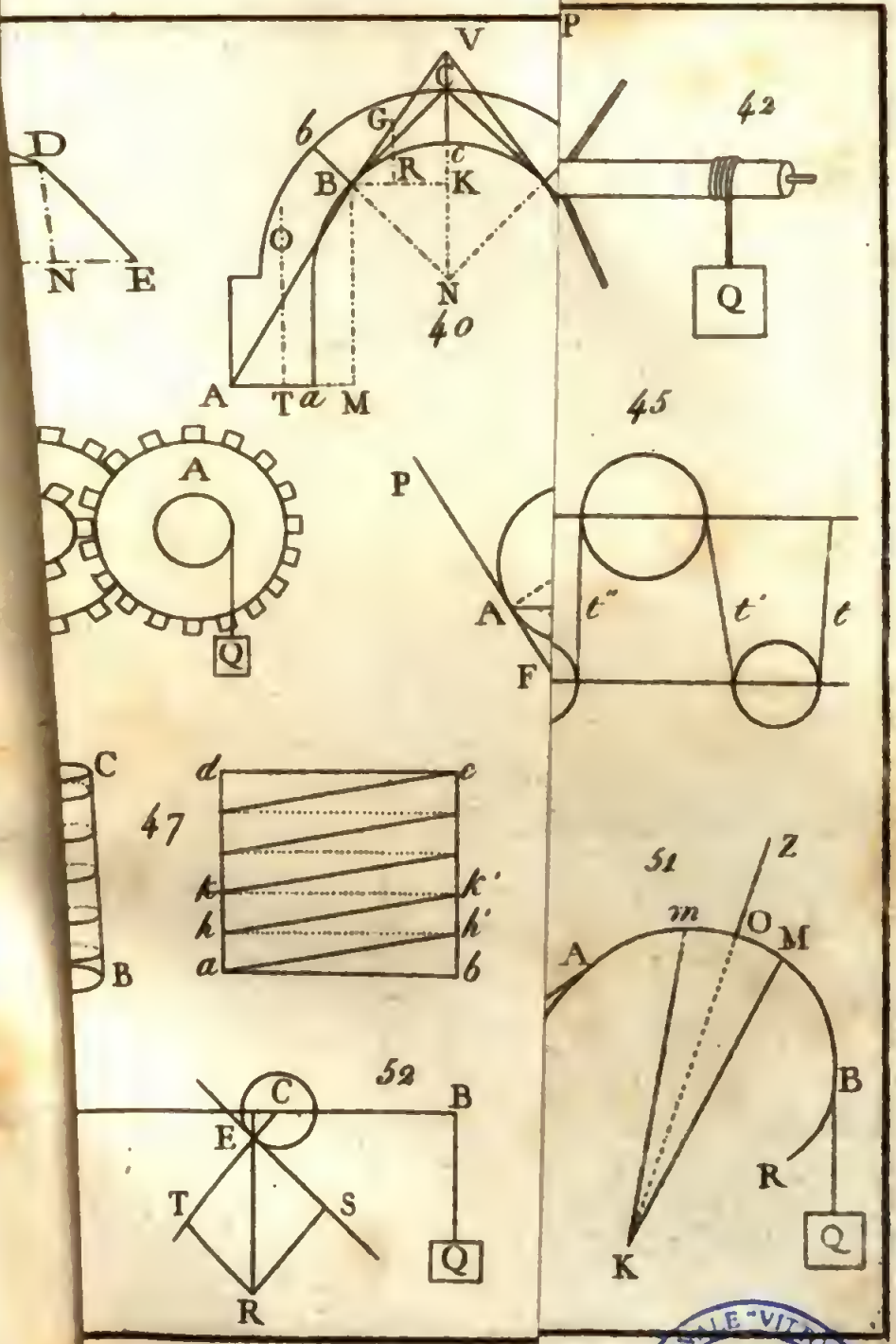


Tavola IV



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI